目　　录

第一章　解的存在性

1-1 引　　言

一个偏微分方程，顾名思义，是一个含有偏导数的方程．当然，导数是对多于一个变量的未知函数求的(如果函数是已知的，我们可以求出导数从而它就不再出现了．如果未知函数只依赖于一个变量，我们就把方程叫做常微分方程)．最简单的偏微分方程是

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=0 \tag{1-1}$$

其中未知函数 u 依赖于两个变量 x, y. 方程(1-1)的解显然是

$$u(x, y)=g(y) \tag{1-2}$$

其中 $g(y)$ 是任意的只依赖于 y 的函数．尽管这个例子十分简单，但是我们还是应该更为仔细地考察一下．首先，方程(1-1)的"解"指的是什么呢？你们会说："那是显然的；我们指的不过是一个函数 $u(x, y)$，当把它代入方程(1-1)时，使方程成立．"但是稍加思考立即得知会出现一些问题，虽然对于这个特殊的方程来说，这些问题是容易解决的．

我们恰恰不能把任何所提出的解代入方程(1-1)：因为我们首先要对这个解进行微分．因此，为了使得 $u(x, y)$ 是方程(1-1)的一个解而必须加在 $u(x, y)$ 上的第一个要求是 $u(x, y)$ 具有关于 x 的导数．第二个要求，方程(1-1)在 x, y 的哪些值上成立呢？是所有的实数值呢，还是一部分呢？无疑这是必须规定的．其次，让我们来考察一下我们的"解"——等式(1-2)．$g(y)$ 是什么样的函数类呢？它一定具有关于 y 的导数吗？或者它甚至可能是间断的呢？或许它根本不必是一个普通意义下的函数，而是一个所谓的

"分布"呢(如果你从未听说过"分布"这个名词,那对最后一个说法就不必去理它).

另一个值得注意的事实是不管我们允许的是什么样的函数类,方程(1-1)将会有许多解.如果想要一个特解,那么我们必须规定附加的限制或"边界条件".

最后,上述一切的结果是,有了一个偏微分方程,我们还必须知道该方程在什么地方适用,什么函数类可以作为解.这方面的资料通常是由导出该方程的应用学科所提供的.但是有一些重要的情形,即从应用来说"边界条件"是什么还不清楚时,那就必须通过对方程的研究来决定"边界条件".然后用它们来确定在应用中"有意义"的那些情况.

不用说,可以凭空设想出来的偏微分方程(和方程组)的数目是无穷多的.在应用中提出的方程的数目也是不小的.经验已经向我们表明稍为修改一下方程(例如改变某一项的符号)就可能使解在性质上完全不同,也就要用完全不同的方法,去解这些方程,这就使问题变得复杂了.所以对以下情况不必感到惊讶,即,到目前为止我们距离系统地处理偏微分方程还差得远呢.充其量,现在的知识水平可以说只是积累了在特殊情形下所用的特殊的方法(用"技巧"这个词甚至更为恰当).因此任何偏微分方程的论著,不论它多么广博,一定只能限于一个相对说来是较小的课题范围内.

我们选定要讨论的主要是线性偏微分方程,因为它们最容易处理.包含一个未知函数 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 的最一般的线性偏微分方程可以写成如下形式:

$$\sum_{\mu_1+\cdots+\mu_n\leqslant m} a_{\mu_1,\cdots,\mu_n}(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial^{\mu_1+\cdots+\mu_n}u}{\partial x_1^{\mu_1}\cdots\partial x_n^{\mu_n}}=f(x_1, \cdots, x_n) \quad (1\text{-}3)$$

其中求和是对所有的非负整数 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 进行的,而 $a_{\mu_1,\cdots,\mu_n}$ 和 f 是给定的函数(因为我们至今还没有定义什么叫线性方程,所以也可以把方程(1-3)作为线性方程的定义).

任何打算研究偏微分方程的人只要让他看看方程(1-3)就可

能望而生畏了(如果方程(1-3)没有起到这样的效果，那么我们在以后就会做得好些)．但是一旦我们经受住这最初的冲击，我们就会明白：写法上稍稍缩短一点就有许多好处．例如，如果我们令μ表示多重指标$\mu=(\mu_1, \cdots, \mu_n)$，其模为$|\mu|=\mu_1+\cdots+\mu_n$，又设$x$表示向量$(x_1, \cdots, x_n)$，并记

$$D^\mu=\frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1}\cdots\partial x_n^{\mu_n}}$$

那么方程(1-3)就变成

$$\sum_{|\mu|\leq m} a_\mu(x)D^\mu u(x)=f(x) \tag{1-4}$$

(1-4)看起来要好得多．

让我们对方程(1-4)考察得更仔细一点．左端包含一些项的和，其中每一项都是一个系数与u的一个导数的乘积．我们可以把它看作是作用在u上的微分算子A．那么，我们可以把方程(1-4)更简单地写作

$$Au=f \tag{1-5}$$

其中

$$A=\sum_{|\mu|\leq m} a_\mu(x)D^\mu \tag{1-6}$$

算子A称为线性的，因为对于所有的函数u_1, u_2和所有的常数α_1, α_2,

$$A(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)=\alpha_1 A(u_1)+\alpha_2 A(u_2) \tag{1-7}$$

成立．因为算子A是线性的，所以方程(1-5)叫做线性方程．

关于方程(1-4)的解我们指的是什么意思呢？因为方程中包含一直到m阶且包括m阶在内的导数，看来要求这些导数存在且连续，而当把它们代入方程(1-4)时等号成立这是十分自然的．我们就把这作为目前的解的定义．后面，我们将发现，对于解的这个定义进行重大的修改，如果说不是必须的话也是方便的．

我们要求方程(1-4)在什么地方成立呢？显然，方程应在$(x_1, \cdots, x_n)$空间的某个子集Ω中成立．这个子集必须具体规定．当然，为使$u(x)$的适当阶的导数有定义，$u(x)$必须在Ω的每一点的邻域中有定义．因为我们要求解在Ω中有直到m阶的连续导

数，我们应当给这种函数集合一个名称．我们用 E^n 表示 n-维坐标空间．

定义 1-1 设 Ω 是 E^n 中一个集合．我们用 $C^m(\Omega)$ 来表示在 Ω 中每点的邻域内有定义且在 Ω 中具有阶数 $\leqslant m$ 的各阶连续导数的一切函数的集合．如果对于每个 m，函数 u 都属于 $C^m(\Omega)$，u 就叫做无穷次可微的，而且说成是属于 $C^\infty(\Omega)$ 的，即

$$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{m=0}^{\infty}C^m(\Omega)$$

对于 $m=0$，我们记作 $C(\Omega)=C^0(\Omega)$．这就是 Ω 中的连续函数的集合．

1-2 无解的方程

关于方程 (1-4) 可以提的第一个问题是：在一给定的集合 Ω 中(1-4)是否有解．为使得我们的环境尽可能有助于说明问题，我们愿意把 Ω 取作由 E^n 中满足

$$x_1^2+\cdots+x_n^2<r^2$$

的点$(x_1, \cdots, x_n)$组成的球 Σ_r，其中 r 是某个正数．(把 Σ_r 叫做球的理由是明显的.)我们甚至愿意假定函数 f 和 A 的系数在 Σ_r 中是无穷次可微的（即它们属于 $C^\infty(\Sigma_r)$）．在这样的条件下人们有理由期望方程(1-4)保证有解存在．遗憾的是事与愿违．H. Lewy (1957)（读音是 Layvee）发现了一个简单的例子，研究一下这个例子是有启发性的．

背景是三维空间，用 x, y, t 表示坐标（把字母 z 留给另一个量）．方程写出来是简单的：

$$u_x+iu_y+2(ix-y)u_t=f(x, y, t) \tag{1-8}$$

有必要作一点解释．这个方程的系数是复值的，而到目前为止，假定所考虑的函数和系数都是实值函数是不言而喻的．下面的考虑澄清了这个问题．

假定我们允许 f 在下列意义下是复值的：存在两个真正的实

值函数$f_1(x, y, t)$和$f_2(x, y, t)$使得$f=f_1+if_2$. 这应理解为两个函数f_1和f_2之间不必有什么联系. 对于任何的解u我们也作同样假定. 那么,方程(1-8)等价于方程组

$$\begin{cases} u_{1x}-u_{2y}-2xu_{2t}-2yu_{1t}=f_1 & (1\text{-}9) \\ u_{2x}+u_{1y}+2xu_{1t}-2yu_{2t}=f_2 & (1\text{-}10) \end{cases}$$

这个方程组中只含实值函数. 这是两个未知函数两个方程的方程组. 因此, 方程(1-8)正好是方程(1-9)和(1-10)的一种简写. 方程(1-8)是个方程组这一事实并不是使得(1-8)无解的一个因素. 我们还将举出一个带有实的f和实系数的无解的单个方程的例子.

现在回到方程(1-8). 为了简化(1-8), 我们引进复变量$z=x+iy$. 那么$u(x, y, t)$是z和t的函数. 仅当u满足Cauchy-Riemann方程

$$u_{1x}=u_{2y},\ u_{1y}=-u_{2x} \tag{1-11}$$

或简写为

$$u_x+iu_y=0 \tag{1-12}$$

时, u才是z的解析函数.

为了进一步简化,令

$$2u_z=u_x-iu_y,\ 2u_{\bar{z}}=u_x+iu_y \tag{1-13}$$

则方程(1-12)变成

$$u_{\bar{z}}=0 \tag{1-14}$$

而方程(1-8)变成

$$u_{\bar{z}}+izu_t=\frac{1}{2}f \tag{1-15}$$

现在令Ω是集合$x^2+y^2<a$, $|t|<b$, 其中a和b是任意固定的正数. 我们将证明存在一个$f\in C^\infty(\Omega)$使得方程(1-8)在$C^1(\Omega)$中无解. 因为a和b是任意的,由此可知对于任何$r>0$, 方程(1-8)在Σ_r中无解.

为实现我们的证明, 设$\psi(\sigma, \tau)$是两个实变量σ, τ的连续可微复值函数, $\psi(\sigma, \tau)$在矩形$0<\sigma<a$, $|\tau|<b$外等于零. 令

$$\varphi(x, y, t)=\psi(\rho, t),\ \rho=x^2+y^2$$

注意到φ在x, y, t空间中有连续导数，并且在Ω外等于零. 由锁链法则，我们有

$$\varphi_z(x, y, t)=\bar{z}\psi_\rho(\rho, t) \tag{1-16}$$

现在我们假定方程(1-8)在Ω中有一个解u. 那么

$$\iiint_\Omega (u_{\bar{z}}+izu_t)\bar{\varphi}\,dx\,dy\,dt=\frac{1}{2}\iiint_\Omega f\bar{\varphi}\,dx\,dy\,dt$$

其中字母上的一横表示复共轭. 对左端的积分进行分部积分（参看1-3节），我们有

$$-\iiint_\Omega u\overline{(\varphi_z-i\bar{z}\varphi_t)}\,dx\,dy\,dt=\frac{1}{2}\iiint_\Omega f\bar{\varphi}\,dx\,dy\,dt$$

（因为φ在Ω的边界上为零所以没有边界积分）. 由等式(1-16)，这就变成

$$-\iiint_\Omega zu\overline{(\psi_\rho-i\psi_t)}\,dx\,dy\,dt=\frac{1}{2}\iiint_\Omega f\bar{\varphi}\,dx\,dy\,dt \tag{1-17}$$

现在我们引进坐标ρ, θ来代替x和y, 其中

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

注意到$\frac{1}{2}d\rho\,d\theta=dx\,dy$, 我们看到等式(1-17)变成

$$-\int_{-b}^{b}\int_0^{2\pi}\int_0^a zu\overline{(\psi_\rho-i\psi_t)}\,d\rho\,d\theta\,dt=\frac{1}{2}\int_{-b}^{b}\int_0^{2\pi}\int_0^a f\bar{\psi}\,d\rho\,d\theta\,dt \tag{1-18}$$

现在我们令

$$U(\rho, t)=\int_0^{2\pi} zu\,d\theta \tag{1-19}$$

并且假定f与θ无关. 因为ψ也和θ无关，所以我们有

$$-\int_{-b}^{b}\int_0^a U\overline{(\psi_\rho-i\psi_t)}\,d\rho\,dt=\pi\int_{-b}^{b}\int_0^a f\bar{\psi}\,d\rho\,dt$$

对上式左端进行分部积分，得

$$\int_{-b}^{b}\int_0^a (U_\rho+iU_t-\pi f)\bar{\psi}\,d\rho\,dt=0$$

下一步要注意到ψ是在$0<\rho<a$, $|t|<b$外等于零的任意的连续

可微函数. 由众所周知的论证(参看 1-3 节), 得到

$$U_\rho+iU_t=\pi f,\ 0<\rho<a,\ |t|<b \tag{1-20}$$

其次取 $f=g'(t)$, 这里 g 是只依赖于 t 的光滑实值函数, 又令

$$V(\rho,\ t)=U+\pi ig \tag{1-21}$$

则
$$V_\rho+iV_t=0,\ 0<\rho<a,\ |t|<b$$

因此 V 是 $\rho+it$ 在集合 $0<\rho<a$, $|t|<b$ 上的解析函数. 因为 $u(x,\ y,\ t)$在 $0\leqslant\rho<a$, $|t|<b$ 上是连续的, 所以 $U(\rho,\ t)$也连续. 而且, 由方程(1-19) $U(0,\ t)=0$. 因此

$$\operatorname{Re} V(0,\ t)=0,\ |t|<b \tag{1-22}$$

因为 V 在 $0<\rho<a$, $|t|<b$ 中是解析的, 而且其实部当 $\rho=0$ 时等于零, 我们知道可以越过直线 $\rho=0$ 对 V 进行解析开拓(参看任何一本好的复变函数方面的书). 特别是 $V(0,\ t)$在$|t|<b$ 中是 t 的一个解析函数(即可展为 t 的幂级数). 但是 $V(0,\ t)=\pi ig(t)$. 因此, 我们已经证明了: 当 f 只依赖于 t 时, 为了使方程(1-8)有一个解, 则 f 必须是 t 的解析函数. 例如, 如果我们取

$$g(t)=\begin{cases} e^{-1/t}, & t>0 \\ 0, & t\leqslant 0 \end{cases} \tag{1-23}$$

则 f 有各阶的连续导数, 但它在 $t=0$ 的任何邻域中不是解析的. 因此, 对于这样的 f, 方程(1-8)不可能有解.

现在我们可以给出一个无解的"实"方程的例子了. 设 Au 表示方程 (1-15) 的左端. 设 $\overline{A}$ 表示通过对 A 的所有系数取复共轭而从 A 得到的算子. 那么

$$A\overline{A}u=\frac{1}{4}(u_{xx}+u_{yy})+(xu_{yt}-yu_{xt})+(x^2+y^2)u_{tt}-iu_t \tag{1-24}$$

遗憾的是因为有最后一项, 所以这样做并不成为"实"方程. 但是我们有

$$A\overline{A}=B-i\frac{\partial}{\partial t}$$

其中 B 是一个实系数的线性算子. 因此

$$A\overline{A}\,\overline{(A\overline{A})}=\left(B-i\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(B+i\frac{\partial}{\partial t}\right)=B^2+\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

现在我们断言方程

$$B^2u+u_{tt}=f \tag{1-25}$$

当 $f=g'$ 而 g 是由方程 (1-23) 给出时不可能有解．因为，如果 u 是方程(1-25)的解，则 $v=\frac{1}{2}\overline{A}(\widetilde{\overline{A}A})u$ 就应是方程(1-8)的解，与前面得到的结果矛盾．这个例子是由 F. Treves (1962) 给出的．

应该指出直接讨论方程(1-25)要困难得多．允许利用复值函数这一事实带来了巨大的帮助．在研究偏微分方程时许多别的情形中也是如此．

1-3 分部积分

在 1-2 节中我们利用了一个初等的但是非常有用的技巧，即分部积分，为了帮助对此有点生疏了的人们，我们在这里复习一下．设 Ω 是 E^n 中具有分片光滑边界的开连通集(区域)．这就是说 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 由有限块曲面组成，其中每一块曲面都可对某个 j 表为形式

$$x_j=h(x_1,\ \cdots,\ x_{j-1},\ x_{j+1},\ \cdots,\ x_n)$$

函数 h 具有连续的一阶导数．Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 是 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 的并集．假定 Ω 是有界的，即 Ω 包含在某个 R 充分大的球 Σ_R 中．如果 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，则

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}\,dx=\int_{\partial\Omega} f\gamma_k\,d\sigma,\ 1\leqslant k\leqslant n \tag{1-26}$$

其中 $dx=dx_1\cdots dx_n$，γ_k 是 x_k 轴和 $\partial\Omega$ 的外法向间夹角的余弦，而 $d\sigma$ 是 $\partial\Omega$ 上的曲面微元．(注意我们只用一重积分号来表示一个体积分；要写 n 个积分号稍嫌麻烦．)有许多名称都与等式(1-26)相联系，包括 Gauss 定理，Green 定理，Stokes 定理，散度定理等等．至于(1-26)的证明，我们介绍大家去看任何一本好的高等微积分的书，例如，Spivak (1965)的书．

现在假定 u 和 v 在 $\overline{\Omega}$ 中有连续导数而且 u 和 v 的积在 $\partial\Omega$ 上

等于零．根据(1-26)，我们有

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} v\, dx,\ 1 \leqslant k \leqslant n \tag{1-27}$$

这就是 1-2 节中所用的公式． 这是一个很方便的公式，因为它允许我们把求导数从一个函数"搬"到另一个函数上去．它是如此之方便以致所有研究偏微分方程的人的第一条普遍法则是：当你不知道下一步该做什么时，那就分部积分．

等式(1-27)有一个特点，就是带一个负号，这个负号似乎是无害的，但却使得搞偏微分方程的人化在它上面的精力比化在任何其它单个的因素上的精力都要多．然而有一种方法可以免去这个负号．这种方法如下． 如前面商定过的那样，我们可以允许复值函数，只要我们认为其实部和虚部不必有任何联系． 并且容易验证等式(1-26)和(1-27)对于这种复值函数是成立的． 因此，如果我们在(1-27)中取 $v=\bar{w}$ 且令

$$D_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1-28}$$

那么我们有

$$\int_{\Omega} u \overline{D_k w}\, dx = \int_{\Omega} D_k u \bar{w}\, dx \tag{1-29}$$

负号立即消失了．

这就要求稍稍改变一下 1-1 节中所用的记号．现在我们记

$$D^{\mu} = D_1^{\mu_1} \cdots D_n^{\mu_n} = \frac{(-i)^{|\mu|} \partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1} \cdots \partial x_n^{\mu_n}} \tag{1-30}$$

和前面一样，每个线性算子可以写成方程(1-4)的形式，但是在把方程(1-3)变为方程(1-4)时，我们必须在系数前乘上 i 的幂．

在 1-2 节中我们考虑了一个形为

$$\int_{\Omega} Au\bar{\varphi}\, dx$$

的表达式，并进行了分部积分．现假定 A 是由方程(1-4)给出的，A 的每个系数 $a_{\mu}(x)$ 都属于 $C^m(\bar{\Omega})$．还假定函数 φ 也属于 $C^m(\bar{\Omega})$，并且在边界 $\partial\Omega$ 上及其附近都等于零． 那么我们可以重复应用等式(1-29)把 A 中所有的导数搬到 $\bar{\varphi}$ 上去．这就给出

$$\int_{\Omega} Au\bar{\varphi}\,dx=\int_{\Omega} u\overline{A'\varphi}\,dx \tag{1-31}$$

其中

$$A'\varphi=\sum_{|\mu|\leq m} D^{\mu}(\bar{a}_{\mu}\varphi) \tag{1-32}$$

(大家看到，没有负号！)我们懒于去把微商算出来，但是我们知道所有的微商求出后，我们可以把 A' 写成如下形式：

$$A'=\sum_{|\mu|\leq m} b_{\mu}(x)D^{\mu} \tag{1-33}$$

因此，A' 正象 A 那样是一个线性偏微分算子．它的系数 b_{μ} 只依赖于 A 的系数及其导数．我们把 A' 称为 A 的形式共轭．就象我们在 1-2 节中看到的那样，$\partial/\partial\bar{z}+iz\partial/\partial t$ 的形式共轭是

$$\partial/\partial z-i\bar{z}\partial/\partial t$$

现设 u 是 Ω 中的连续函数，又假定对所有在边界 $\partial\Omega$ 附近等于零的函数 $\varphi\in C^{\infty}(\Omega)$ 有

$$\int_{\Omega} u\bar{\varphi}\,dx=0 \tag{1-34}$$

那么我们断言 u 在 Ω 中恒等于零．因为，假定有一点 $x_0\in\Omega$ 使得 $\mathrm{Re}\,u(x_0)>0$．因为 u 是连续的，所以在 x_0 的某个邻域中，例如对于 $|x-x_0|<r$ 有 $\mathrm{Re}\,u(x)>0$，其中

$$|x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$$

我们断言可以找到一个函数 $\varphi\in C^{\infty}(\Omega)$ 使得

$$\varphi(x)>0,\ 对于\ |x-x_0|<r$$
$$\varphi(x)=0,\ 对于\ |x-x_0|\geq r$$

暂时假定这样的 φ 是存在的，我们注意到 $u\varphi$ 具有同样的性质．因此

$$\mathrm{Re}\int_{\Omega} u\varphi\,dx>0$$

但这是和等式(1-34)矛盾的．类似地我们可证明任何地方都不可能有 $\mathrm{Re}\,u(x)<0$，而且对于 $\mathrm{Im}\,u$，同样的结论也是成立的．因此 $u\equiv0$.

为了构造函数 φ，令

$$j(x)=a\exp[(|x|^2-1)^{-1}],\quad |x|<1$$
$$=0,\qquad |x|\geqslant 1 \tag{1-35}$$

其中 a 是一个不等于零的常数. 把验证 $j(x)\in C^\infty(E^n)$ 留作一个习题. 现在我们只要取 $\varphi(x)=j[(x-x_0)/r]$ 就行了.

在后面几章中, 知道以下事实将是有用的. 设 Ω 是一个有界区域, 又设 K 是 Ω 的任何有界闭子集. 那么存在一个在 $\partial\Omega$ 附近等于零的 $\psi\in C^\infty(\Omega)$, 并且使

$$0\leqslant\psi(x)\leqslant 1,\quad x\in\Omega \tag{1-36}$$

$$\psi(x)=1,\quad x\in K \tag{1-37}$$

为了构造 ψ, 注意到存在一个 $\varepsilon>0$, 使得从 K 中任何一点到 $\partial\Omega$ 中任何一点的距离总是 $>3\varepsilon$(证明留作习题). 设 K_ε 是所有 $x\in\Omega$ 且对某一点 $y\in K$ 满足 $|x-y|<\varepsilon$ 的点 x 构成的集合. 在等式(1-35)中选 a 使得

$$\int_{|x|<1} j(x)dx=1 \tag{1-38}$$

然后定义 ψ 为

$$\psi(x)=\varepsilon^{-n}\int_{K_\varepsilon} j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy \tag{1-39}$$

通过积分号下求微商, 容易证明 $\psi\in C^\infty(E^n)$(这也留作一个习题). 现在, 若 x 到 $\partial\Omega$ 的距离小于 ε, 则 x 到 K 的距离 $\geqslant 2\varepsilon$, 因此 x 到 K_ε 的距离 $\geqslant\varepsilon$. 这时, 等式(1-39)中的被积函数恒等于零, 这就证明了 $\psi(x)=0$. 因此, ψ 在 $\partial\Omega$ 附近等于零. 若 $x\in K$, 则

$$\psi(x)=\varepsilon^{-n}\int_{|x-y|<\varepsilon} j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy$$
$$=\int_{|z|<1} j(z)dz=1$$

因为 $j(x)\geqslant 0$, 一般说, 我们有 $\psi(x)\geqslant 0$ 并且

$$\psi(x)\leqslant\varepsilon^{-n}\int_{|x-y|<\varepsilon} j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy=1$$

这就证明了所想要的性质.

回想一下我们始终假定 Ω 具有分片光滑的边界. 除非另有声明, 今后我们总作这样的假定.

1-4 一个必要条件

现在我们已经看到一个线性偏微分方程不一定有解，自然要问哪些方程是有解的呢.

为了解决这个问题，设 Ω 是 E^n 中的一个区域，又设 A 是形为(1-6)式的线性算子. 假定给定了一个定义在 Ω 上的函数 f. 我们想知道方程

$$Au=f \tag{1-40}$$

在 Ω 中是否有解. 因为我们都是初学者，所以为了要得到一个解，关于 $\partial\Omega$, f 以及 A 的系数，需要多少阶的光滑性我们就假定它们有多少阶的光滑性. 但是，正如 1-2 节的例子所表明的，这样做是不够的.

因为我们不知道如何着手去做，让我们从另一方面出发来考虑问题. 我们假定方程(1-40)有一个解，再来看看这是否蕴含着涉及到 A, f 或 Ω 的什么条件. 为了应用偏微分方程的第一个一般法则(见 1-3 节)，我们设 φ 是 $C^\infty(\Omega)$ 中任何在 $\partial\Omega$ 附近以及在 $|x|$ 充分大处(当 Ω 是无界的情形)等于零的函数. 对 φ 作这些限制的理由是我们要利用等式(1-31). 注意到已知等式(1-31)对有界区域是成立的. 但是，若 Ω 无界时，只要我们使 φ 在 R 充分大的某个球 Σ_R 外为零我们还可利用 (1-31). 因为我们事实上只在有界区域上积分. 要注意 R 可以因函数 φ 而异，但只要对每个 φ, R 是有限的就行了.

$C^\infty(\Omega)$ 中在 $\partial\Omega$ 附近而且在某个 Σ_R 外等于零的函数集合，因为它们很有用，所以有一个专门的名词. 它们被称为**检验函数**. 一般地，一个函数的**支集**是使该函数不等于零的点集的闭包. 因此 Ω 中的检验函数是 $C^\infty(\Omega)$ 中在 Ω 中有有界支集的函数. 因为在 E^n 中的有界闭集是紧集，所以有时候就使用**紧支集**这一术语.

我们引入记号

$$(u, v)=\int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}\,dx \tag{1-41}$$

因此，等式(1-29)就变成

$$(u, D_k v)=(D_k u, v) \tag{1-42}$$

现在回到等式(1-41)，根据等式(1-31)，我们有

$$(f, \varphi)=(Au, \varphi)=(u, A'\varphi) \tag{1-43}$$

(注意我们假定 A 的系数是属于 $C^m(\overline{\Omega})$ 的)．因此，由 Schwarz 不等式(见 1-5 节)

$$|(f, \varphi)|=|(u, A'\varphi)|\leqslant\|u\|\|A'\varphi\|$$

其中

$$\|u\|^2=(u, u)=\int_{\Omega}|u|^2dx$$

由此我们立即看到，要使方程(1-40)有解的一个必要条件是

$$|(f, \varphi)|\leqslant C\|A'\varphi\| \tag{1-44}$$

对于 Ω 中的一切检验函数 φ 以及某个常数 C 成立．(1-44) 是否是充分条件呢？为了弄清这点，我们试着从不等式(1-44)往回推．要这样做，我们需要有关 Hilbert 空间的一些事实：这些事实综述在 1-5 节中(熟悉这些事实的读者可以略去 1-5 节不读而直接去读 1-6 节)．

1-5 Hilbert 空间的一些概念

我们回忆一下复 Hilbert 空间 H 的定义．它由元素 $u, v, w, \cdots$ 组成，对于这些元素定义了加法运算以及与复数(纯量)$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 相乘的乘法运算使得

$$u+v=v+u \tag{1-45}$$

$$(u+v)+w=u+(v+w) \tag{1-46}$$

$$(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u \tag{1-47}$$

$$\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v \tag{1-48}$$

$$\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u \tag{1-49}$$

存在 H 的一个 0 元素，使得

$$u+0=u \tag{1-50}$$

对于 H 的每一对元素 u, v, 定义了一个复数，称为 u, v 的内积，并且记作 (u, v)，使得

$$(\alpha u+\beta v, w)=\alpha(u, w)+\beta(v, w) \tag{1-51}$$

$$(u, v)=\overline{(v, u)} \tag{1-52}$$

$$(u, u)\geqslant 0, \text{ 当且仅当 } u=0 \text{ 时 } (u, u)=0 \tag{1-53}$$

这几条是不完全的，但让我们暂时停一下并考察一下(1-45)到(1-53). 首先,我们注意到

$$0u=0 \tag{1-54}$$

因为,由(1-47)和(1-51)有

$$(0u, 0u)=(1u+(-1)u, 0u)=(u, 0u)-(u, 0u)=0$$

由(1-53),就证明了 $0u=0$. 由此我们知道

$$(0, u)=0 \tag{1-55}$$

因为由(1-54)和(1-51)

$$(0, u)=(0u, u)=0(u, u)=0$$

类似地我们有

$$u+(-1)u=0 \tag{1-56}$$

因为，如 u, v 是 H 的任意元素，由(1-51)，(1-48)，(1-49)，(1-47)，(1-54)和(1-55)，我们有

$$\begin{aligned}(u+(-1)u, v)&=1(u+(-1)u, v)\\&=(1u+(-1)u, v)\\&=(0, v)=0\end{aligned}$$

取 $v=u+(-1)u$, 由(1-53)，我们知道 $u+(-1)u=0$. 把 $1u$ 加到等式(1-56)的两端,并且应用(1-46),(1-47),(1-54)和(1-50),我们得到

$$u=1u \tag{1-56a}$$

由等式(1-56)我们看到可以定义减法. 因为，若 $u+v=w$, 则 $u+v+(-1)v=w+(-1)v$, 因此，由等式(1-46)，(1-56)和(1-50)有 $u=w+(-1)v$. 我们把 $(-1)v$ 记作 $-v$, 而把 $w+(-1)v$ 记作 $w-v$. 从等式(1-49)和(1-54)推得

$$\alpha 0=0 \tag{1-57}$$

如果我们令 $\|u\|=(u,\ u)^{1/2}$

我们有

$$\|\alpha u\|=|\alpha|\,\|u\| \tag{1-58}$$

$$\|u\|>0,\ 若\quad u\neq 0 \tag{1-59}$$

$$\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\| \tag{1-60}$$

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2 \tag{1-61}$$

$$|(u,\ v)|\leqslant\|u\|\,\|v\| \tag{1-62}$$

我们称$\|u\|$为 u 的范数. (1-60), (1-61) 和 (1-62) 分别称为三角不等式, 平行四边形定律, 和 Schwarz 不等式. 在这三者中最容易证明的是平行四边形定律. 从(1-51)和(1-52), 因为

$$\|u+v\|^2=(u+v,\ u+v)=\|u\|^2+(u,\ v)+(v,\ u)+\|v\|^2$$

$$\|u-v\|^2=(u-v,\ u-v)=\|u\|^2-(u,\ v)-(v,\ u)+\|v\|^2$$

就立即推得平行四边形定律. 为证(1-62), 考虑表达式

$$\|\alpha u+v\|=(\alpha u+v,\ \alpha u+v)=|\alpha|^2\|u\|^2+2\mathrm{Re}\,\alpha(u,\ v)+\|v\|^2$$

$$=\left|\alpha\|u\|+\frac{(v,\ u)}{\|u\|}\right|^2+\|v\|^2-\frac{|(u,\ v)|^2}{\|u\|^2}$$

这里我们已经假定 $u\neq 0$. [若 $u=0$, 则从等式 (1-55) 立即得到 (1-62).] 取 α 使右端第一项等于零, 即, $\alpha=-(v,\ u)/\|u\|^2$. 因此

$$\|v\|^2-\frac{|(u,\ v)|^2}{\|u\|^2}\geqslant 0$$

这正好就是(1-62). 一旦有了 Schwarz 不等式, 就容易从

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2&=\|u\|^2+2\,\mathrm{Re}(u,\ v)+\|v\|^2\\&\leqslant\|u\|^2+2\|u\|\,\|v\|+\|v\|^2\\&=(\|u\|+\|v\|)^2\end{aligned}$$

推出(1-60)了.

最后, 还有一个公理必须加到(1-45)到(1-53)这几条上去, 这就是

$$H\ 是完备的 \tag{1-63}$$

所谓完备就是指: 对于 H 中任何满足

$$\|u_j-u_k\|\to 0,\ 当\ j,\ k\to\infty\ 时 \tag{1-64}$$

的元素序列 $\{u_k\}$，存在一个元素 $u\in H$，使得

$$\|u-u_k\|\to 0,\ \text{当}\ k\to\infty\ \text{时} \tag{1-65}$$

满足(1-64)的序列称为 Cauchy 序列．注意由于(1-60)，(1-65)蕴含着(1-64)．在应用中完备性是非常重要的．有时候，我们将把(1-65)简写为

$$u_k\to u\ \text{在}\ H\ \text{中，当}\ k\to\infty\ \text{时} \tag{1-66}$$

现在我们转到一切 Hilbert 空间所共有的某些重要性质．S 是 H 的一个子集，若对于一切纯量 α, β，每当 u, v 属于 S 时，就有 $\alpha u+\beta v$ 属于 S，则 S 称为 H 的一个子空间．若 S 中的每个 Cauchy 序列收敛到 S 中的一个元素，则 S 称为闭(子空间)．显然 Hilbert 空间的一个闭子空间本身就是一个 Hilbert 空间．

引理 1-2 设 M 是 H 的一个闭子空间．则对于每个不属于 M 的 $u\in H$，存在一个 $v\in M$，使得

$$\|u-v\|=\operatorname*{glb}_{w\in M}\|u-w\| \tag{1-67}$$

证明 令 $d=\text{glb}\|u-w\|$，$w\in M$．于是，存在一个极小化序列 $\{w_k\}\subseteq M$，使得当 $k\to\infty$ 时，$\|u-w_k\|\to d$，从(1-61)我们看到

$$4\left\|u-\frac{1}{2}(w_k+w_j)\right\|^2+\|w_k-w_j\|^2$$

$$=2(\|u-w_k\|^2+\|u-w_j\|^2)\to 4d^2,\ \text{当}\ j,\ k\to\infty\ \text{时}$$

因为 $\frac{1}{2}(w_k+w_j)\in M$(这就是对 M 所作的假设的理由；它表明在什么地方定理中对 M 所作的假设是可以减弱的)：

$$4\left\|u-\frac{1}{2}(w_k+w_j)\right\|^2\geqslant 4d^2$$

因此当 j, $k\to\infty$ 时，$\|w_k-w_j\|\to 0$．由 H 的完备性，存在一个 $v\in M$，使得 $\|w_k-v\|\to 0$．这就意味着

$$\|u-v\|=\lim\|u-w_k\|=d$$

证毕．

定理 1-3 投影定理 设 M 是 H 的一个闭子空间．那么对于每个 $u\in H$，存在一个 $v\in M$，使得 $(u-v,\ M)=0$ (即，使得对所有的 $w\in M$，$(u-v,\ w)=0$)．

证明　若 $u\in M$，令 $v=u$．否则，由引理 1-2 知道，存在 $v\in M$ 使得 $\|u-v\|=d$，d 是 u 到 M 的"距离"．于是，若 $w\neq 0$ 是 M 的任何一个元素，则对所有的复数 α，

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2&\leqslant\|u-v-\alpha w\|^2\\&=\|u-v\|^2-2\operatorname{Re}\bar{\alpha}(u-v,\ w)+|\alpha|^2\|w\|^2\end{aligned}$$

特别是，若取

$$\alpha=\frac{(u-v,\ w)}{\|w\|^2}$$

上式还是成立的．因此

$$\|u-v\|^2\leqslant\|u-v\|^2-2\frac{|(u-v,\ w)|^2}{\|w\|^2}+\frac{|(u-v,\ w)|^2}{\|w\|^2}$$

因此

$$|(u-v,\ w)|^2\leqslant 0$$

当然，仅当

$$(u-v,\ w)=0$$

时这才可能是对的．因此 $(u-v,\ M)=0$．　　证毕．

推论 1-4　若 $M\neq H$，则存在 H 中一个元素 $w\neq 0$，使得 $(w,\ M)=0$．

证明　根据假定，存在一个不属于 M 的 $u\in H$．由定理 1-3，存在一个 $v\in M$，使得 $(u-v,\ M)=0$．令 $w=u-v$．显然 $w\neq 0$．

H 上的一个有界线性泛函 F 是 H 上的一个复值函数，它满足下列条件：

1．对所有的复数 α，β 以及 u，$v\in H$

$$F(\alpha u+\beta v)=\alpha Fu+\beta Fv$$

2．存在常数 K，使得

$$|Fu|\leqslant K\|u\|,\ u\in H \tag{1-68}$$

我们定义

$$\|F\|=\operatorname*{lub}_{u\in H}\frac{|Fu|}{\|u\|} \tag{1-69}$$

注意到一个有界线性泛函在如下意义下是连续的，即，在 H 中 $u_k\to u$ 蕴含着 $Fu_k\to Fu$．因为，由(1-68)

$$|F(u_k-u)|\leqslant K\|u_k-u\|\to 0,\ \text{当 } k\to\infty \text{ 时}$$

定理 1-5　Fréchet-Riesz 定理　对于 H 上的每个有界线性泛函 F，存在一个元素 $f\in H$，使得

$$Fu=(u,\ f),\ u\in H \tag{1-70}$$

并且

$$\|F\|=\|f\| \tag{1-71}$$

证明　设 N 是由所有 $v\in H$ 且使 $Fv=0$ 的 v 构成的集合. N 是 H 的一个子空间. 因为,如果 $u,\ v$ 属于 N, 则对所有的纯量 $\alpha,\ \beta$ $F(\alpha u+\beta v)=\alpha Fu+\beta Fv=0$, 因此, $\alpha u+\beta v\in N$. 而且, N 是 H 的闭子空间. 因为,如果 $v_k\in N$, 并且 $v_k\to v$, 则

$$|Fv|=|F(v-v_k)|\leqslant K\|v-v_k\|\to 0,\ 当\ k\to\infty\ 时$$

因此 $v\in N$.

现若 $N=H$, 令 $f=0$, 很容易地就得到定理的证明. 如若不然,则在 H 中存在一个 $w\neq 0$, 使得 $(w,\ N)=0$(推论 1-4), 所以, $Fw\neq 0$ 并且

$$F\left(u-\frac{Fu}{Fw}\ w\right)=Fu-\frac{Fu}{Fw}\ Fw=0$$

因此, 对于所有的 $u\in H$, $u-(Fu/Fw)w$ 属于 N. 特别是, 这意味着

$$\left(u-\frac{Fu}{Fw}\ w,\ \ w\right)=0$$

即

$$(u,\ w)=\frac{Fu}{Fw}\|w\|^2$$

因此

$$Fu=\left(u,\ \frac{w}{\|w\|^2}\ \overline{Fw}\right)$$

如果我们取 $f=wFw/\|w\|^2$, 这就证明了 (1-70). 为了得到等式 (1-71),我们注意到,由关系式(1-70)和(1-62)

$$|Fu|\leqslant\|f\|\|u\|$$

这就证明了 $\|F\|\leqslant\|f\|$. 另一方面,若在(1-70)中取 $u=f$ 我们有

$$Ff=\|f\|^2$$

或

$$\|f\|=\frac{|Ff|}{\|f\|}\leqslant\|F\|$$

因此,定理获证.

设 S 是 H 的一个子空间. 我们定义 $\overline{S}$(S 的闭包)为 H 中所有 $f\in H$ 使得 f 是 S 中的元素的极限的元素 f 构成的集合. 因

此，如果存在一个序列 $\{v_k\}\subseteq S$，使得

$$\|v_k-f\|\to 0$$

则 $f\in\overline{S}$. 显然 $S\subset\overline{S}$，并且若 S 是闭的，则 $S=\overline{S}$. 容易验证 $\overline{S}$ 是 H 的一个闭子空间，并且是包含 S 的“最小的”闭子空间.

定理 1-6 Hahn-Banach 定理 设 S 是 H 的一个子空间，又设 F 是 S 上的一个有界线性泛函，它满足

$$|Fu|\leqslant K_0\|u\|,\ u\in S \tag{1-72}$$

则存在在整个 H 上的有界线性泛函 G，使得

$$Gu=Fu,\ \ u\in S \tag{1-73}$$

并且

$$|Gv|\leqslant K_0\|v\|,\ v\in H \tag{1-74}$$

证明 我们首先把 F 延拓到 $\overline{S}$ 上. 做法如下. 若 $\{v_k\}\subset S$ 而且 $\|v_k-f\|\to 0$，令

$$Ff=\lim Fv_k$$

因为

$$|F(v_k-v_j)|\leqslant K_0\ \|v_k-v_j\|\to 0$$

所以这个极限是存在的. 这个极限和所取的特定的序列 $\{v_k\}$ 无关，因为，若 $\{v_k'\}$ 是另一个这样的序列，则

$$|Fv_k-Fv_k'|=|F(v_k-v_k')|\leqslant K_0\|v_k-v_k'\|$$
$$\leqslant K_0(\|v_k-f\|+\|f-v_k'\|)\to 0$$

而且

$$|Ff|=\lim|Fv_k|\leqslant\lim K_0\|v_k\|=K_0\|f\|.$$

因此，F 可以延拓成为 $\overline{S}$ 上的一个有界线性泛函. 于是，对于每个 $w\in H$，存在一个 $w_1\in\overline{S}$，使得 $(w-w_1,\ \overline{S})=0$（定理 1-3）. 我们令

$$Gw=Fw_1$$

显然，G 满足有界线性泛函定义中的条件 1（见推论 1-4）. 由下列事实就推得 G 满足条件 2,

$$\|w\|^2=\|w_1\|^2+\|w-w_1\|^2$$

因此

$$\|w_1\|\leqslant\|w\|$$

并且

$$|Gw|=|Fw_1|\leqslant K_0\|w_1\|\leqslant K_0\|w\|$$

证毕.

这就是我们在本章中所需要的全部结果. 现在，我们将给出一些我们以后要用到的进一步的结果.

引理 1-7 设 S 是 H 的一个子空间. 用 $S^{\perp}$ 来记所有满足 $(u, S)=0$ 的 $u\in H$ 的集合. 显然, $S^{\perp}$ 是 H 的闭子空间. 而且, 我们有

$$(S^{\perp})^{\perp}=\overline{S}$$

证明 假定 $u\in\overline{S}$. 则存在 S 中的一个元素序列 $\{u_k\}$, 使得在 H 中 $u_k\to u$. 因此, 若 $w\in S^{\perp}$, 则

$$(u, w)=\lim(u_k, w)=0$$

因此 $u\in(S^{\perp})^{\perp}$. 反之, 假定 $u\in(S^{\perp})^{\perp}$. 若 $u\notin\overline{S}$, 则 $u=v+w$, 其中 $v\in\overline{S}$ 而 $w\in\overline{S}^{\perp}$(定理 1-3). 因为 u 和 v 都在 $(S^{\perp})^{\perp}$ 中, 所以 w 也在 $(S^{\perp})^{\perp}$ 中. 因此, $(w, S^{\perp})=0$. 但 $w\in S^{\perp}$, 所以 $w=0$. 因此 $u=v\in\overline{S}$. 引理证毕.

我们将把 H 的一个序列 $\{v_k\}$ 称为弱收敛到一个元素 $v\in H$, 如果对于每个 $w\in H$

$$(v_k-v, w)\to 0$$

定理 1-8 若 $\{v_k\}$ 是一个序列, 使得

$$\|v_k\|\leqslant C \tag{1-75}$$

则这个序列有一个弱收敛的子序列.

证明 现在对于固定的 j, 复数 (v_k, v_j) 是有界的. 因此, 由通常的对角线过程, 我们可以求得 $\{v_k\}$ 的一个子序列 $\{\hat{v}_k\}$, 使得对于每个固定的 j, $(\hat{v}_k, v_j)$ 是收敛的. 因此, 如果 f 属于集合 S, S 是由 H 中所有能表成形式

$$f=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i v_i$$

的那些元素构成的集合, 其中 N 为任何整数, 则 $(\hat{v}_k, v_j)$ 是收敛的. 若 f 是 S 中元素序列 $\{f_n\}$ 的极限, $(\hat{v}_k, v_j)$ 也收敛. 因为

$$\begin{aligned}|(\hat{v}_k-\hat{v}_l, f)|&\leqslant|(\hat{v}_k-\hat{v}_l, f-f_n)|+|(\hat{v}_k-v_l, f_n)|\\&\leqslant 2C\|f-f_n\|+|(\hat{v}_k-\hat{v}_l, f_n)|\end{aligned}$$

对于任何 $\varepsilon>0$, 我们可以取 n 足够大, 使 $2C\|f-f_n\|<\varepsilon/2$, 一旦 n 选定, 我们取 k 和 l 足够大, 使得 $|(\hat{v}_k-\hat{v}_l, f_n)|<\varepsilon/2$. 这就证明了对每个 $f\in\overline{S}$, $(\hat{v}_k, f)$ 收敛. 由定理 1-3, 对每个 $w\in H$, 存在一个 $w_1\in\overline{S}$, 使得

$$(w-w_1,\ \bar{S})=0$$

这就意味着

$$(\hat{v}_k,\ w)=(\hat{v}_k,\ w-w_1)+(\hat{v}_k,\ w_1)=(\hat{v}_k,\ w_1)$$

这就证明了，对于每个 $w\in H$，$(\hat{v}_k,\ w)$ 是收敛的.

如果是这种情况，我们可以令 $Fw=\lim(w,\ \hat{v}_k)$. 于是，F 是 H 上的一个有界线性泛函. 应用定理 1-5，我们知道存在一个 $v\in H$，使得

$$Fw=(w,\ v)$$

即，使得

$$(\hat{v}_k-v,\ w)\to 0 \tag{1-76}$$

证毕.

定理 1-9 Banach-Saks 定理 在定理 1-8 的假设下，存在 $\{v_k\}$ 的一个子序列 $\{\tilde{v}_k\}$ 以及一个 $v\in H$，使得

$$\left\|\frac{\tilde{v}_1+\cdots+\tilde{v}_k}{k}-v\right\|\to 0,\ 当\ k\to\infty\ 时$$

证明 由定理 1-8，存在 $\{v_k\}$ 的一个子序列 $\{\tilde{v}_k\}$ 以及一个 $v\in H$，使得(1-76)成立. 令 $u_k=\hat{v}_k-v$. 则对于某个常数 C_1，有 $\|u_k\|\leqslant C_1$，并且对每个 $w\in H$，有 $(u_k,\ w)\to 0$. 我们现在从 $\{u_k\}$ 中挑出一个子序列 $\{\tilde{u}_k\}$，使得

$$|(\tilde{u}_1,\ \tilde{u}_{k+1})|\leqslant\frac{1}{k},\ \cdots,\ |(\tilde{u}_k,\ \tilde{u}_{k+1})|\leqslant\frac{1}{k}$$

这是容易用归纳法来完成的. 因此

$$\sum_{i=1}^{k}|(\tilde{u}_i,\ \tilde{u}_{k+1})|\leqslant 1,\ k=1,\ 2,\ \cdots$$

从而

$$\sum_{j=2}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}|(\tilde{u}_i,\ \tilde{u}_j)|<k$$

因此

$$\begin{aligned}\left\|\frac{(\tilde{u}_1+\cdots+\tilde{u}_k)}{k}\right\|^2&=k^{-2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}(\tilde{u}_i,\ \tilde{u}_j)\\&\leqslant k^{-2}\left\{kC_1^2+2\sum_{j=2}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}|(\tilde{u}_i,\ \tilde{u}_j)|\right\}\\&<k^{-1}(C_1^2+2)\to 0,\ 当\ k\to\infty\ 时\end{aligned}$$

为完成证明，现在我们取 $\tilde{v}_k=\tilde{u}_k+v$ 就行了.

定理 1-10 Banach-Steinhaus 定理 设 $\{F_n\}$ 是 H 上的一个有界线性泛函序列,使得,对于每个 $u\in H$

$$\operatorname*{lub}_{n}|F_n(u)|<\infty \tag{1-77}$$

则存在一个常数 C, 使得

$$|F_n(u)|\leqslant C\|u\|,\ u\in H \tag{1-78}$$

证明 我们首先注意到, 若存在一个 $v_0\in H$ 和常数 $\delta>0$, K, 使得

$$|F_n(v)|\leqslant k,\ 对于\ \|v-v_0\|<\delta \tag{1-79}$$

则(1-78)成立. 因为, 设 u 是 H 的任何元素, 又令 $v=v_0+\delta u/(2\|u\|)$, 则 $\|v-v_0\|<\delta$. 所以, 由(1-79)

$$|F_n(v)|\leqslant K$$

但
$$F_n(v)=F_n(v_0)+\frac{\delta F_n(u)}{2\|u\|}$$

因此
$$|F_n(u)|\leqslant\frac{2\|u\|(|F_n(v)|+|F_n(v_0)|)}{\delta}\leqslant\frac{4K\|u\|}{\delta}$$

这就证明了(1-78)是成立的,其中 $C=4K/\delta$.

如果(1-79)不成立, 那就应该存在一个 $u_1\in H$ 以及一个整数 n_1, 使得

$$\|u_1\|=1,\ |F_{n_1}(u_1)|>1$$

因为 F_{n_1} 是连续的,所以存在 $\delta_1>0$, 使得

$$|F_{n_1}(u)|>1,\ 对于\ \|u-u_1\|<\delta_1$$

我们取 $\delta_1<1$. 现在我们断言一定还存在 $u_2\in H$ 和整数 $n_2>n_1$, 使得

$$\|u_2-u_1\|<\delta_1,\ |F_{n_2}(u_2)|>2$$

因为, 否则的话, (1-79)将对 $K=2$, $v_0=v_1$ 以及 $\delta=\delta_1$ 成立. 根据连续性,存在 $\delta_2>0$, 使得

$$|F_{n_2}(u)|>2,\ 对于\ \|u-u_2\|<\delta_2$$

取 $\delta_2<\min\left[\delta_1-\|u_1-u_2\|,\ \frac{1}{2}\right]$. 这是为了保证从 $\|u-u_2\|<\delta_2$ 能推得 $\|u-u_1\|<\delta_1$. 继续这样做, 我们看到存在 $u_3\in H$ 以及整数 $n_3>n_2$, 使得

$$\|u_3-u_2\|<\delta_2,\ |F_{n_3}(u_3)|>3$$

因此,存在 $\delta_3>0$, 使得

$$|F_{n_3}(u)|>3,\ 对于\ \|u-u_3\|<\delta_3$$

我们取 $\delta_3<\min\left[\delta_2-\|u_3-u_2\|,\ \dfrac{1}{3}\right]$. 归纳地继续这样做下去, 我们发现存在 $u_k\in H$, $n_k>n_{k-1}$ 以及 $\delta_k>0$, 满足

$$\delta_k<\min\left[\delta_{k-1}-\|u_k-u_{k-1}\|,\ \frac{1}{k}\right]$$

使得

$$|F_{n_k}(u)|>k,\ 对于\ \|u-u_k\|<\delta_k \tag{1-80}$$

现在,若 $j>k$, 我们有

$$\begin{aligned}\|u_j-u_k\|&\leqslant\sum_{i=k}^{j-1}\|u_{i+1}-u_i\|\\&\leqslant\sum_{i=k}^{j-1}(\delta_i-\delta_{i+1})=\delta_k-\delta_j<\frac{1}{k}\end{aligned} \tag{1-81}$$

因此, $\{u_k\}$ 是 H 中的一个 Cauchy 序列. 由 H 的完备性,存在一个 $u_0\in H$, 使得在 H 中 $u_k\to u_0$. 保持 k 固定且在 (1-81) 中令 $j\to\infty$, 我们有

$$\|u_0-u_k\|\leqslant\delta_k$$

由(1-80),这就表明

$$\|F_{n_k}(u_0)\|\geqslant k$$

因此

$$\operatorname*{lub}_n|F_n(u_0)|=\infty$$

与假设矛盾. 这就证明了定理.

推论 1-11 若 $\{v_k\}$ 是 H 中的弱收敛序列, 则存在常数 C, 使得 (1-75) 成立.

证明 令 $F_k u=(u,\ v_k)$. 则 $\{F_k\}$ 是 H 上的一个有界线性泛函序列. 而且对每个 u, 因为复数 $(u,\ v_n)$ 是收敛的,因而是有界的所以 (1-77) 成立. 因以,就存在常数 C, 使得

$$|(u,\ v_n)|\leqslant C\|u\|,\ u\in H \tag{1-82}$$

取 $u=v_n$, 我们有

$$\|v_n\|^2\leqslant C\|v_n\|$$

或 $$\|v_n\| \leqslant \hat{C}$$
这就完成了证明.

有时候在实际中出现如下情形：空间 H 满足(1-45)到(1-53)各条性质，但 H 不是完备的．如果需要完备性(通常是要求完备性的)，那么可以利用下面的"技巧"．设 $\{u_k\}$ 是 H 中的任何 Cauchy 序列．如果存在一个满足 (1-65) 的 $u\in H$，那就一切都好．如果不存在，那就是在 H 中找到了一个"洞"．我们用创造一个新的元素 u 的方法来填这个"洞"．我们"定义"一个 u 使它正是 $\{u_k\}$ 在 H 中的"极限"[1]．然后我们令 $\bar{H}$ 是 H 中所有 Cauchy 序列的极限所构成的集合．$\bar{H}$ 称为 H 的**完备化**．$\bar{H}$ 是一个 Hilbert 空间并不是很显然的，但仔细的分析就证明了 $\bar{H}$ 满足包括(1-63)在内的所有公理．即使这样，新元素的性质是什么仍不十分清楚．在有些情形中，我们并不关心这种问题；我们只要能应用 Hilbert 空间理论中的定理就行了．在另一些情形里，我们能非常确切地描述这些"理想"元素．

现在我们给出构造 $\bar{H}$ 的另一种方法．设 H 是满足(1-45)—(1-53)而不满足(1-63)的空间．设 W 是形为 (1-70) 的有界线性泛函 F 的集．注意适合(1-70)的 $f\in H$ 是唯一的．因为如果还有 $Fu=(u,\ f_1)$，则对所有的 $u\in H$，$(u,\ f-f_1)=0$，因此 $f_1=f$．还要注意到等式(1-71)成立，再注意到定理 1-5 证明末尾的推理．若
$$Fu=(u,\ f),\ Gu=(u,\ g),\ u\in H$$
并且我们定义
$$(F,\ G)=(g,\ f) \tag{1-83}$$
则容易验证 W 满足(1-45)到(1-53)．事实上，我们可以通过对应 $F\leftrightarrow f$ 把 W 和 H 看成是一样的．

其次，设 Z 是由 H 上所有具有下列性质的有界线性泛函所构成的集合，即，它们是 W 中的泛函在范数意义下的极限．意思就是说，若 W 中存在一泛函序列 $\{F_n\}$ 使得

---

1) 这一段叙述不清楚，请参看其它泛函分析书籍．——校者注

$$\|F_n - F\| \to 0, \text{ 当 } n \to \infty \text{ 时} \tag{1-84}$$

的话，就说 $F \in Z$. 若(1-84)成立，并且

$$F_n u = (u, f_n), \ u \in H$$

则 $\{f_n\}$ 是 H 中的一个 Cauchy 序列；从等式(1-71)就得到这点. 此外，如果 $G_n u = (u, g_n)$ 并且 $\|G_n - G\| \to 0$, 我们令

$$(F, G) = \lim (g_n, f_n)$$

从 W 满足(1-45)到(1-53)这一事实推出 Z 也满足这几条性质. 而且 Z 还具有完备性这条附加的性质. 为证明这点，设 $\{F_n\}$ 是 Z 中一个 Cauchy 序列. 我们知道对于每个 n 存在一个 $G_n \in W$, 使得

$$\|F_n - G_n\| < \frac{1}{n} \tag{1-85}$$

所以由此得出$\{G_n\}$是 W 中的一个 Cauchy 序列. 若 $G_n u = (u, g_n)$, 则 $\{g_n\}$ 是 H 中的一个 Cauchy 序列. 特别是

$$G_u = \lim (u, g_n), \ u \in H \tag{1-86}$$

是存在的，并且是 H 上的有界线性泛函. 而且

$$\|G_n - G\| \to 0, \text{ 当 } n \to \infty \tag{1-87}$$

为证这点，注意到对每个 $\varepsilon > 0$, 存在一个足够大的 N, 使得只要 $m, n > N$, 就有

$$\frac{|(u, g_m - g_n)|}{\|u\|} < \varepsilon, \ u \in H$$

令 $m \to \infty$, 由(1-86)对于 $n > N$ 我们有

$$\frac{|Gu - (u, g_n)|}{\|u\|} < \varepsilon, \ u \in H$$

这就给出(1-87). 现在，如果我们把(1-85)和(1-87)结合起来，我们得到

$$\|F_n - G\| \to 0, \text{ 当 } n \to \infty \text{ 时} \tag{1-88}$$

(1-87)就表明 $G \in Z$, 而(1-88)表明 G 是 F_n 在范数意义下的极限. 因此，Z 是完备的. 显然，W 在 Z 中稠密. 因为可以认为 W 和 H 是一样的，所以我们的断言就得到了证明.

1-6 弱 解

现在我们回到方程(1-40). 在1-4节中我们已经证明了(1-40)有解的一个必要条件是: 对于 Ω 中所有的检验函数(1-44)成立. 现在让我们假定(1-44)成立, 然后往回推. 是否能推出方程(1-40)有解呢?

我们用 $C_0^\infty(\Omega)$ 来记 Ω 上检验函数的集合. 另一个重要的函数集合是 Ω 上的平方可积函数的集合. 这些函数是定义在 Ω 上的(复值)可测函数 u, 使得

$$\int_\Omega |u|^2 dx < \infty$$

这个函数集合记作 $L^2(\Omega)$. $L^2(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间, 其内积由(·)给出(关于这点我们介绍大家去参看任何一本好的实变函数论的书). 显然, $C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

现设 W 是这样的 $w \in L^2(\Omega)$ 之集合, 对于这种 w 存在 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 满足

$$A'\varphi = w \tag{1-89}$$

显然 W 是 $L^2(\Omega)$ 的子空间. 对于 $w \in W$, 我们令

$$Fw = (\varphi, f) \tag{1-90}$$

其中 f 是在方程(1-40)中给定的函数, 而 φ 是在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中满足方程(1-89)的任何函数. 为使这种定义有意义, 我们必须证明 F 只依赖于 w 而不依赖于满足(1-89)的 φ 的特殊取法. 为此假定 φ_1 是另一个满足 $A'\varphi_1 = w$ 的检验函数. 那么, 由(1-44)

$$|(f, \varphi - \varphi_1)| \leqslant C\|A'(\varphi - \varphi_1)\| = C\|w - w\| = 0$$

这就证明了 $(f, \varphi) = (f, \varphi_1)$. 因此, F 只依赖于 w 而不依赖于 φ. 于是对于每个 $w \in W$, F 确定了一个由等式(1-90)给出的复数. 因此, F 是 W 上的一个泛函. 它显然是线性的. 而且, 由(1-44)

$$|Fw| = |(\varphi, f)| \leqslant C\|A'\varphi\| = C\|w\| \tag{1-91}$$

这就证明了 F 是有界的. 由 Hahn-Banach 定理(定理 1-6), F

可以延拓成为在整个 $L^2(\Omega)$ 上的一个有界线性泛函．因此，由 Fréchet-Riesz 定理（定理 1-5）存在一个 $u\in L^2(\Omega)$，使得 $\|u\|=\|F\|\leqslant C$，并且对所有的 $w\in L^2(\Omega)$，有

$$Fw=(w,\ u) \tag{1-92}$$

特别是，若 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，则 $A'\varphi\in W$，从而由等式 (1-90) 以及 (1-92)，有

$$(u,\ A'\varphi)=(f,\ \varphi) \tag{1-93}$$

(1-93) 对所有的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 成立．注意 (1-93) 和 (1-43) 之间的相似性．为了得到

$$(Au-f,\ \varphi)=0 \tag{1-94}$$

我们现在就要对等式 (1-93) 的左端进行分部积分．因为 (1-94) 应该对所有的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 成立，所以由此应得出 $Au=f$（参看 1-3 节末）．这就将给出了我们所想要的结论．

如果我们知道 $u\in C^m(\Omega)$，那么确实可以对等式 (1-93) 进行分部积分，从而得出结论：u 是方程 (1-40) 的解．但是关于 u 我们知道些什么呢？我们只知道 u 属于 $L^2(\Omega)$ 并满足等式 (1-93)．是否这就蕴含着 $u\in C^m(\Omega)$ 呢？遗憾的是，正如 1-1 节的例子所表明的那样，不能推出 $u\in C^m(\Omega)$．为了说明这点，设 Ω 是包含在带形区域 $|y|\leqslant R$ 中的二维区域，又设 $g(y)$ 是在 $|y|\leqslant R'>R$ 中的 y 的连续函数，$g(y)$ 没有连续导数．我们知道，可以找到一个在 $|y|\leqslant R$ 中一致收敛到 $g(y)$ 的连续可微函数序列 $\{g_n(y)\}$（实际上，我们将在 2-2 节中证明这点）．如果 φ 是 Ω 中的任何检验函数，则由分部积分

$$(g_n,\ \varphi_x)=-\left(\frac{\partial g_n}{\partial x},\ \varphi\right)=0$$

当 $n\to\infty$ 时取极限，我们得到

$$(g,\ \varphi_x)=0,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

显然这并不能推出 $g\in C^1(\Omega)$．

请不要丧气而罢手，让我们试图从我们做的工作中拯救点什么东西出来．我们已经证明如果 u 是 $Au=f$ 的解，则 (1-44) 成

立．然而，如果我们仔细地考察一下我们的证明，我们将看到我们实际上没有用到 u 是解这一事实，而只是用到 u 满足等式(1-93)．对于所有的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 满足 (1-93) 的函数 $u\in L^2(\Omega)$ 称为方程(1-40)的弱解．因此，我们已经证明了

定理 1-12 方程 (1-40) 有弱解的必要充分条件是对于所有的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，不等式(1-44)成立．若一个弱解属于 $C^m(\Omega)$，则它是一个解(译注：即古典解)．若(1-44)成立，则存在一个弱解 u，且满足 $\|u\|\leqslant C$．

从上面所说的一切，我们看到当我们寻求方程(1-40)的解时，我们可以提出两个不同的问题：

1．什么时候方程(1-40)有弱解？

2．什么时候弱解是充分可微的，从而就是一个解？

定理 1-12 对第一个问题给出了回答．为使定理 1-12 能够使用，我们必须把它表为与 A, f 以及 Ω 有关的条件．在 1-7 节中我们将讨论很大一类算子，对于它们可以应用定理 1-12．

1-7 常系数算子

设 A 是形为

$$A=\sum_{|\mu|\leqslant m} a_\mu D^\mu \tag{1-95}$$

的常系数算子．我们将证明在任何有界区域 Ω 中、对于任何 f，方程 $Au=f$ 有弱解．事实上，我们将证明

定理 1-13 若 A 有常系数，则对于每个有界区域 Ω 都存在常数 C，使得

$$\|\varphi\|\leqslant C\|A\varphi\|,\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{1-96}$$

作为定理 1-13 的推论，我们有

推论 1-14 若 A 有常系数，Ω 是任何有界区域，并且 $f\in L^2(\Omega)$，则 $Au=f$ 有一弱解．

假定定理 1-13 成立，

推论 1-14 的证明　若 A 的系数为常数，则 A' 的系数也是常数．事

实上

$$A' = \sum_{|\mu| \leqslant m} \bar{a}_\mu D^\mu \tag{1-97}$$

[见等式(1-32)]. 因此,把定理 1-13 用到 A' 上去,存在常数 C,使得

$$\|\varphi\| \leqslant C\|A'\varphi\|, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1-98}$$

因为 $f \in L^2(\Omega)$, 由 Schwarz 不等式[见(1-62)]我们有

$$|(f, \varphi)| \leqslant \|f\| \|\varphi\| \leqslant C' \|A'\varphi\|, \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

因此,(1-44)成立,从而由定理 1-12, $Au=f$ 有一弱解.

定理 1-13 的证明是不难的. 为此, 我们引进一些方便的记号. 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是 n 个变量,对于 $\mu=(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ 又令

$$\xi^\mu = \xi_1^{\mu_1} \cdots \xi_n^{\mu_n}$$

考虑 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 的多项式

$$P(\xi) = \sum_{|\mu| \leqslant m} a_\mu \xi^\mu \tag{1-99}$$

如果我们用 $D_1, \cdots, D_n$ 去替换 $\xi_1, \cdots, \xi_n$, 那么我们得到

$$P(D) = \sum_{|\mu| \leqslant m} a_\mu D^\mu \tag{1-100}$$

这表明 $P(D)$ 正好是算子 A. 这样做对我们有什么好处呢? 是的,假定我们要计算 $A(uv)$. 因为

$$D_k(uv) = uD_k v + vD_k u$$

如果我们约定 $\overset{u}{D}_k$ 表示只对 u 求导而 $\overset{v}{D}_k$ 只对 v 求导的话, 我们可以把它写成形式

$$D_k(uv) = (\overset{u}{D}_k + \overset{v}{D}_k)uv$$

因此

$$P(D)uv = P(\overset{u}{D} + \overset{v}{D})uv$$

于是,由 Taylor 公式

$$P(\eta+\xi) = \sum_{|\mu| \leqslant m} \frac{1}{\mu!} P^{(\mu)}(\eta)\xi^\mu \tag{1-101}$$

其中 $\mu! = \mu_1! \cdots \mu_n!$, 而

$$P^{(\mu)}(\eta) = \frac{\partial^{|\mu|} P(\eta)}{\partial \eta_1^{\mu_1} \cdots \partial \eta_n^{\mu_n}}, \quad P^{(0)}(\eta) = P(\eta)$$

因此

$$A(uv)=\sum_{|\mu|\leqslant m}\frac{1}{\mu!}P^{(\mu)}(\overset{u}{D})\overset{v}{D}{}^{\mu}(uv)$$

$$=\sum_{|\mu|\leqslant m}\frac{1}{\mu!}P^{(\mu)}(D)uD^{\mu}v \tag{1-102}$$

以后我们将会多次看到,这是一个非常方便的公式.

设 $\bar{P}(\xi)$ 是多项式,其系数为 $P(\xi)$ 的系数的复共轭,即

$$\bar{P}(\xi)=\sum_{|\mu|\leqslant m}\bar{a}_{\mu}\xi^{\mu} \tag{1-103}$$

那么,由(1-97),我们有 $A'=\bar{P}(D)$. 而且

$$\begin{aligned}\|A'\varphi\|^2&=\|\bar{P}(D)\varphi\|^2=[\bar{P}(D)\varphi,\ \bar{P}(D)\varphi]\\&=[\varphi,\ P(D)\bar{P}(D)\varphi]=[P(D)\varphi,\ P(D)\varphi]\\&=\|P(D)\varphi\|^2=\|A\varphi\|^2,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega)\end{aligned} \tag{1-104}$$

我们将借助于以下引理来证明定理 1-13.

引理 1-15 假定 Ω 包含在带形区域 $|x_k-a|\leqslant M/2$ 中, 又设 $P^{(k)}(\xi)=\partial P(\xi)/\partial\xi_k$. 则

$$\|P^{(k)}(D)\varphi\|\leqslant mM\|P(D)\varphi\|,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{1-105}$$

引理 1-15 的直接推论是

推论 1-16 若 Ω 包含在区域 $|x_k-a_k|\leqslant M_k/2$ 中, $1\leqslant k\leqslant n$, 则对于任何多重指标 μ, 有

$$\|P^{(\mu)}(D)\varphi\|\leqslant\frac{m!}{(m-|\mu|)!}M^{\mu}\|P(D)\varphi\|,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{1-106}$$

其中 $M=(M_1,\ \cdots,\ M_n)$.

重复应用引理 1-15, 就得到推论 1-16. 因为总存在一个多重指标 μ, 使得 $P^{(\mu)}(\xi)=$常数$\neq 0$, 所以由此推论就可以推出定理 1-13.

因此剩下要做的就是给出

引理 1-15 的证明　我们对 m 用归纳法. 假定

$$\|Q^{(k)}(D)\varphi\|\leqslant(m-1)M\|Q(D)\varphi\|,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{1-107}$$

对于所有形为

$$Q(\xi)=\sum_{|\mu|<m}c_{\mu}\xi^{\mu} \tag{1-108}$$

的多项式都成立. 通过做一个简单的平移, 我们可以假定 $a=0$. 由等式(1-102), 我们有

$$P(D)(x_k\varphi)=x_kP(D)\varphi+P^{(k)}(D)\varphi$$

因此

$$\begin{aligned}\|P^{(k)}(D)\varphi\|^2&=(P(D)(x_k\varphi)-x_kP(D)\varphi,\ P^{(k)}(D)\varphi)\\&=(P(D)(x_k\varphi),\ P^{(k)}(D)\varphi)\\&\quad-(x_kP(D)\varphi,\ P^{(k)}(D)\varphi)\\&=(\bar{P}^{(k)}(D)(x_k\varphi),\ \bar{P}(D)\varphi)\\&\quad-(x_kP(D)\varphi,\ P^{(k)}(D)\varphi)\\&=(x_k\bar{P}^{(k)}(D)\varphi+\bar{P}^{(kk)}(D)\varphi,\ \bar{P}(D)\varphi)\\&\quad-(P(D)\varphi,\ x_kP^{(k)}(D)\varphi)\\&\leqslant\|P(D)\varphi\|[M\|P^{(k)}(D)\varphi\|+\|P^{(kk)}(D)\varphi\|]\end{aligned}\tag{1-109}$$

其中 $P^{(kk)}(\xi)=\partial^2P(\xi)/\partial\xi_k^2$, 而且我们已经用了等式(1-104). 因为 $P^{(k)}(\xi)$ 是(1-108)的形式, 由归纳假设, 我们有

$$\|P^{(kk)}(D)\varphi\|\leqslant(m-1)M\|P^{(k)}(D)\varphi\|$$

因此 $$\|P^{(k)}(D)\varphi\|^2\leqslant mM\|P(D)\varphi\|\|P^{(k)}(D)\varphi\|$$

两端除以 $\|P^{(k)}(D)\varphi\|$, 我们得到(1-105). 为完成证明, 我们注意到对于 $m=1$, $P^{(kk)}(\xi)\equiv0$. 这时, 由(1-109)立即推出(1-105).

不等式(1-96)和(1-106)属于 Hörmander(1955). 我们的证明是遵循着 Malgrange (1961)的证明.

注 对于本节中的任何结果, 实际上我们不必假定 $\partial\Omega$ 是分片光滑的. 因为我们讨论的是在 $\partial\Omega$ 附近等于零的函数, 实际上我们只是在这些函数的支集上进行积分.

习 题

1-1 证明由(1-23)给出的函数 $g(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 中有各阶连续导数, 但在 $t=0$ 的邻域中不是解析的.

1-2 证明由(1-35)给出的函数 $j(x)$ 属于 $C^\infty(E^n)$.

1-3 设 K_1 和 K_2 是 E^n 中两个不相交的闭子集. 若 K_1 有界, 试证明 K_1 和

K_2间的距离是正的．利用这一结果去证明(1-37)后面所说的结论．

1-4 通过在积分号下求微商，证明由(1-39)给出的函数 $\psi(x)$ 属于 $C^\infty(E^n)$．

1-5 设 $P(\xi)$ 是一多项式．试证存在一个多重指标 μ，使得 $P^{(\mu)}(\xi)=$常数 $\neq 0$．

1-6 给出一个满足(1-45)到(1-53)的空间 H 的例子，H 具有如下性质：存在一个 H 上的有界线性泛函序列 $\{F_k\}$，使得对于每个 $v\in H$ 数 $F_k(v)$ 是有界的，而当 $k\to\infty$ 时 $\|F_k\|\to\infty$．

1-7 试证在 1-5 节中所描述的空间 $\overline{H}$ 是一个 Hilbert 空间．

1-8 试证当且仅当 $S=\overline{S}$ 时子空间 S 是闭的．

1-9 试证一个子空间的闭包是包含该子空间的最小闭子空间．

1-10 设 W 是 Hilbert 空间 H 的任一子集．试证 $W^\perp$ 是 H 的一个闭子空间．

1-11 证明定理 1-8 的证明中的第二句话．

1-12 说明在定理 1-9 的证明中怎样去挑选序列 $\{\tilde{u}_k\}$．

1-13 证明 1-5 节末所描述的空间 W 满足(1-45)到(1-54)．

第二章　正则性(常系数)

2-1　一个必要条件

在第一章中我们得到一个不等式，它对于要使 $Au=f$ 在区域 Ω 中有一弱解来说是必要而且充分的．然后，我们接着证明了：对于有界的 Ω，对于任何 $f\in L^2(\Omega)$，任何常系数算子满足这一不等式，因此有一弱解．但是我们还是要去寻求属于 $C^m(\Omega)$ 的解．

像通常一样，当我们探讨一个不熟悉的领域时，我们先取一个尽可能简单的情形．假定 A 的系数是常数，让我们首先考察 $f=0$ 的情形．这时我们总可以求得光滑解．因为设 $\zeta=(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_n)$ 是一个分量为复数的向量，又令

$$(\zeta,\ x)=\zeta_1x_1+\cdots+\zeta_nx_n \tag{2-1}$$

其中 $x\in E^n$．那么，通过求微商，有

$$D_ke^{i(\zeta,\ x)}=\zeta_ke^{i(\zeta,\ x)} \tag{2-2}$$

从而，若 $P(\zeta)$ 是 ζ_k 的多项式，我们有

$$P(D)e^{i(\zeta,\ x)}=P(\zeta)e^{i(\zeta,\ x)} \tag{2-3}$$

因此，若 ζ 是

$$P(\zeta)=0 \tag{2-5}$$

的一个根，则函数 $u=e^{i(\zeta,\ x)}$ 是

$$P(D)u=0 \tag{2-4}$$

的一个解．因为方程(2-5)总有复根，所以我们知道方程(2-4)总有光滑解．

但是，这并没有排除如下的可能性，即方程(2-4)可能有不属于 $C^m(\Omega)$ 的弱解．这就使我们要问下面的问题：为使方程(2-4)的任何弱解都属于 $C^m(\Omega)$，$P(\zeta)$ 必须满足什么条件？

为考察这个问题，设 W 是方程(2-4)所有的弱解构成的集合，

即所有 $u\in L^2(\Omega)$ 并使

$$(u,\ \bar{P}(D)\varphi)=0,\varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{2-6}$$

成立的 u 构成的集合. 我们假定每个 $u\in W$ 至少是属于 $C^1(\Omega)$ 的. 设 Ω_1 是使 $\bar{\Omega}_1\subset\Omega$ 的区域, 又设 B 是作用在 $C^1(\bar{\Omega}_1)$ 中的函数上的算子 D_k, $1\leqslant k\leqslant n$. 于是 W 是 $L^2(\Omega)$ 的一个闭子空间. 因为, 它显然是一个子空间, 而且若 $u_n\in W$, 在 $L^2(\Omega)$ 中 $u_n\to u$, 则根据等式 (2-6) $u\in W$. 因此 W 本身是一个 Hilbert 空间. 其次注意到 B 把 W 映到 $L^2(\Omega_1)$ 中 (事实上把 W 映到 $C(\bar{\Omega}_1)$ 中). 根据假设 B 是线性的而且定义在整个 W 上. 而且, B 是闭算子. 意即若在 W 中 $u_n\to u$, 从而在 $L^2(\Omega_1)$ 中 $Bu_n\to v$, 则 $Bu=v$. 为证明这一点, 注意到若 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_1)$, 则

$$(Bu_n,\ \varphi)=(u_n,\ B\varphi)$$

因此

$$(v,\ \varphi)=(u,\ B\varphi) \tag{2-7}$$

另一方面, 因为 $u\in W$, u 属于 $C^1(\Omega)$, 因此对任何 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_1)$

$$(Bu,\ \varphi)=(u,\ B\varphi).$$

把这和等式 (2-7) 相比较, 我们就知道 $Bu=v$. 现在我们要求助于重要的闭图象定理 (见 2-9 节), 这定理告诉我们 B 是从 W 到 $L^2(\Omega_1)$ 的有界算子. 因此存在常数 C, 使得

$$\int_{\Omega_1}|Bu|^2dx\leqslant C\int_\Omega|u|^2dx,\ u\in W$$

因为 $B=D_k$ 而 k 是从 1 到 n 中的任意整数, 我们有

$$\sum_1^n\int_{\Omega_1}|D_ku|^2dx\leqslant C'\int_\Omega|u|^2dx,\ u\in W \tag{2-8}$$

现在, 设 ζ 是方程 (2-5) 的任意复根. 则 $e^{i(\zeta,x)}$ 是方程 (2-4) 的一个光滑解, 也是一弱解. 把它代入 (2-8), 由 (2-2), 得

$$|\zeta|^2\int_{\Omega_1}e^{-2(\mathrm{Im}\,\zeta,x)}dx\leqslant C'\int_\Omega e^{-2(\mathrm{Im}\,\zeta,x)}dx$$

其中 $\mathrm{Im}\zeta=(\mathrm{Im}\,\zeta_1,\ \cdots,\mathrm{Im}\,\zeta_n)$. 若 Ω 包含在球 Σ_R 中, 则

$$e^{2|(\mathrm{Im}\,\zeta,x)|}\leqslant e^{2|\mathrm{Im}\,\zeta||x|}\leqslant e^{2R|\mathrm{Im}\,\zeta|}$$

因此

$$|\zeta|^2e^{-2R|\mathrm{Im}\,\zeta|}\int_{\Omega_1}dx\leqslant C'e^{2R|\mathrm{Im}\,\zeta|}\int_\Omega dx$$

因此，我们有

$$|\zeta| \leqslant C_0 e^{4R|\operatorname{Im}\zeta|},\ P(\zeta)=0 \tag{2-9}$$

因此，我们已经证明了

引理 2-1 方程 (2-4) 的任何弱解属于 $C^1(\Omega)$ 的一个必要条件是 (2-9) 式成立.

我们将考察对多项式 $P(\xi)$ 而言 (2-9) 蕴含着什么. 为了探索着前进，让我们先来考虑 $P(D)$ 是齐次的情形，即

$$P(\xi)=\sum_{|\mu|=m} a_\mu \xi^\mu \tag{2-10}$$

的情形. 设 ξ_0 是 $P(\xi)=0$ 的一个实根. 那么，对于实的 t

$$P(t\xi_0)=t^m P(\xi_0)=0$$

所以 $t\xi_0$ 也是实根. 因为 $\operatorname{Im}(t\xi_0)=0$，由 (2-9)

$$|t\xi_0| \leqslant C_0$$

令 $t\to\infty$，我们看到必须有 $\xi_0=0$. 因此 $P(\xi)=0$ 仅有的实根就是 $\xi=0$. 具有这种性质的齐次算子叫做椭圆算子. 因此，我们已经证明了

推论 2-2 若 $P(D)$ 是齐次的，并且 (2-9) 成立，则 $P(D)$ 是椭圆算子.

因此，若 $P(\xi)$ 由 (2-10) 给出，我们知道为使方程 (2-4) 的弱解是属于 $C^m(\Omega)$ 的，$P(D)$ 必须是椭圆算子. 在 2-4 节中我们将证明逆命题. 我们将证明若 $P(D)$ 是齐次椭圆算子，那么方程 (2-4) 的每一个弱解确实属于 $C^\infty(\Omega)$. 作为副产品，由此将推得任何齐次椭圆算子 $P(D)$ 满足 (2-9).

为了实现我们的计划，我们必须发展一些工具. 我们将在 2-2 和 2-3 节中来做这件事.

不等式 (2-9) 的导出属于 Hörmander (1955).

因为我们在证明引理 2-1 时用到了算子的概念，我们应该给出一个确切的定义. 从 Hilbert 空间 H_1 到 Hilbert 空间 H_2 的算子 A 就是一个映射，对于 H_1 的某一子集 V 的每一个元素 χ 规定了一个属于 H_2 的元素 $A\chi$. 集合 V 称为 A 的定义域，有时记作 $D(A)$. 如果 $D(A)$ 是 H_1 的子空间而且 1-1 节的 (1-7) 成立，

那么算子 A 称为线性的．如果 $D(A)=H_1$，我们就说 A 在 H_1 中处处有定义．如果存在常数 K，使得 $\|A\chi\|\leqslant K\|\chi\|$ 对 $D(A)$ 中所有的 χ 成立，则算子 A 就称为有界算子．

2-2 Friedrichs 软化子

令
$$
\begin{aligned}
j(x)&=a\exp[(|x|^2-1)^{-1}], & |x|<1\\
&=0, & |x|\geqslant 1
\end{aligned}
$$

其中
$$
a=\left\{\int_{|x|<1}\exp[(|x|^2-1)^{-1}]dx\right\}^{-1}
$$

我们选择这样的 a 值是为了使

$$
\int j(x)dx=1
$$

成立．在1-3节中，我们提到过 $j(x)\in C_0^\infty(E^n)$．对于 $\varepsilon>0$，令

$$
j_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)
$$

则对每个 $\varepsilon>0$，有

$$
j_\varepsilon(x)\geqslant 0,\ \text{在 } E^n \text{ 中} \tag{2-11}
$$

$$
j_\varepsilon(x)=0,\ \text{当 } |x|\geqslant\varepsilon \tag{2-12}
$$

$$
\int j_\varepsilon(x)dx=1 \tag{2-13}
$$

对于 $u\in L^2(E^n)$，我们令

$$
J_\varepsilon u(x)=\int u(y)j_\varepsilon(x-y)dy=\int u(x-z)j_\varepsilon(z)dz \tag{2-14}
$$

定理2-3 对于 $u\in L^2(E^n)$

$$
\|J_\varepsilon u\|\leqslant\|u\| \tag{2-15}
$$

$$
\|J_\varepsilon u-u\|\to 0,\ \text{当 } \varepsilon\to 0 \tag{2-16}
$$

证明 由等式(2-14)和 Schwarz 不等式(1-62)

$$
|J_\varepsilon u|^2\leqslant\left(\int|u(x-z)|^2 j_\varepsilon(z)dz\right)\left(\int j_\varepsilon(x)dx\right)
$$

由此

$$\int |J_\varepsilon u|^2 dx \leqslant \int j_\varepsilon(z) \int |u(x-z)|^2 dx\, dz$$

$$\leqslant \int j_\varepsilon(z) dz \int |u(x)|^2 dx = \|u\|^2$$

为证(2-16)，先假定 u 是连续的．由等式(2-13)

$$J_\varepsilon u - u = \int j_\varepsilon(z)[u(x-z)-u(x)]dz$$

由此 $$|J_\varepsilon u - u|^2 \leqslant \int j_\varepsilon(z) |u(x-z)-u(x)|^2 dz$$

从而

$$\int |J_\varepsilon u - u|^2 dx \leqslant \int j_\varepsilon(z) \int |u(x-z)-u(x)|^2 dz\, dx$$

$$\leqslant \operatorname*{lub}_{|z|<\varepsilon} \int |u(x-z)-u(x)|^2 dx$$

现设 $\rho > 0$ 给定，且取 R 充分大使得

$$\int_{|x|>R} |u(x)|^2 dx < \frac{\rho}{8}$$

则对于 $|z|<R$

$$\int_{|x|>2R} |u(x-z)|^2 dx \leqslant \int_{|x|>R} |u(x)|^2 dx < \frac{\rho}{8}$$

因为 u 是连续的，我们可以取 ε 充分小使得

$$\max_{|z|<\varepsilon} \int_{|x|<2R} |u(x-z)-u(x)|^2 dx < \frac{\rho}{2}.$$

综合这些不等式我们对充分小的 ε 得到

$$\int |J_\varepsilon u - u|^2 dx < \rho$$

这就证明了当 u 是连续时的(2-16)式．当 u 不连续时，我们可以在 $L^2(E^n)$ 中找到一个连续函数 w，使得

$$\|u-w\| < \frac{\rho}{3}$$

因此

$$\|J_\varepsilon u - u\| \leqslant \|J_\varepsilon(u-w)\| + \|J_\varepsilon w - w\| + \|w-u\|$$
$$\leqslant 2\|u-w\| + \|J_\varepsilon w - w\|$$

根据刚才已经证明的结论，我们可以取 ε 充分小，使

$$\|J_\varepsilon w - w\| < \frac{\rho}{3}$$

这就完成了证明.

J_ε 称为软化子. 它是由 Friedrichs 首先使用的 (1953). 我们把验证下列简单性质留作习题

$$J_\varepsilon u \in C^\infty(E^n), \ \text{对于}\ u \in L^2(E^n) \tag{2-17}$$

$$(J_\varepsilon u,\ v) = (u,\ J_\varepsilon v),\ u,\ v \in L^2(E^n) \tag{2-18}$$

$$D_k J_\varepsilon v = J_\varepsilon D_k v,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ v \in C^\infty(E^n) \tag{2-19}$$

在 1-6 节中我们要利用下面的结果.

引理 2-4 设 Ω_1 和 Ω_2 是 E^n 中的有界区域, 而且 $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. 假定 u 是 Ω_2 中的连续函数. 则存在 $C^\infty(\Omega_2)$ 中的函数序列 $\{v_k\}$, $\{v_k\}$ 在 Ω_1 中一致收敛到 u.

证明 把 Ω_2 稍为缩小一点, 我们可以假定 u 在 $\overline{\Omega}_2$ 上连续. 设 $\hat{u}$ 是在 Ω_2 中等于 u, 在 Ω_2 外等于零的函数. u 在 $\overline{\Omega}_2$ 中是一致连续的. 因此, 若给定 $\eta > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

$$|u(x-z) - u(x)| < \eta, \ \text{对于}\ |z| < \delta$$

设 $d > 0$ 是 $\overline{\Omega}_1$ 到 Ω_2 的边界的距离. 则若 $\varepsilon < \min(\delta, d)$, 我们有

$$|J_\varepsilon \hat{u} - u(x)| \leqslant \int j_\varepsilon(z)\, |u(x-z) - u(x)|\, dz$$

$$< \eta \int j_\varepsilon(z)\, dz = \eta,\ x \in \Omega_1$$

这就证明了 $\{J_\varepsilon \hat{u}\}$ 在 Ω_1 中一致收敛到 u. 因为 $J_\varepsilon \hat{u} \in C^\infty(E^n)$. 证毕.

2-3 一组范数

设 $S = S(E^n)$ 表示由 $v(x) \in C^\infty(E^n)$ 且使对于所有的 k 和 μ

$$(1+|x|)^k |D^\mu v(x)|$$

均为有界的函数 $v(x)$ 构成的集合. v 的 Fourier 变换由

$$Fv(\xi) = \int e^{-i(\xi,x)} v(x)\, dx \tag{2-20}$$

定义. 若 $v\in S$, 则可以对(2-20)在积分号下求微商, 得到

$$D^{\mu}Fv(\xi)=(-1)^{|\mu|}F(x^{\mu}v) \tag{2-21}$$

而且, 若对
$$F(D^{\mu}v)=\int e^{-i(\xi,x)}D^{\mu}v(x)dx$$
分部积分, 我们得到

$$F(D^{\mu}v)=\xi^{\mu}Fv \tag{2-22}$$

Fourier 变换有一些有用的性质, 我们有兴趣的是其中的两个性质. 第一个就是反演公式

$$v(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x,\xi)}Fv(\xi)d\xi \tag{2-23}$$

而第二个是 Parseval 恒等式

$$\int v(x)\overline{w(x)}dx=(2\pi)^{-n}\int Fv(\xi)\overline{Fw(\xi)}d\xi \tag{2-24}$$

(2-23) 和 (2-24) 对于 S 中的函数都成立. 我们将在2-5节中证明这两个性质. 这里我们先假定它们是对的, 从而利用 Fourier 变换去定义一组内积.

对于任意实数 s, 令

$$(v, w)_s=\int(1+|\xi|)^{2s}Fv\overline{Fw}d\xi \tag{2-25}$$

$$|v|_s^2=(v, v)_s \tag{2-26}$$

注意到, 由(2-24), 有

$$(v, w)=(2\pi)^{-n}(v, w)_0 \tag{2-27}$$

而且我们有

$$|(v, w)_0|\leqslant|v|_s|w|_{-s} \tag{2-28}$$

这是从
$$(v, w)_0=\int(1+|\xi|)^sFv\cdot(1+|\xi|)^{-s}\overline{Fw}d\xi$$
以及 Schwarz 不等式(1-62)推得的. 我们甚至有

$$|v|_s=\operatorname*{lub}_{w\in S}\frac{|(v, w)_0|}{|w|_{-s}},\ v\in S,\ s\text{ 为实数} \tag{2-29}$$

从(2-28), 显然, (2-29)的左端$\geqslant$右端. 为证左端等于右端, 我们注意到若 $v\in S$, 则 $(1+|\xi|)^{2s}Fv$ 也属于 S. 因此由反演公式(2-23), 存在 $v_0\in S$, 使得 $Fv_0=(1+|\xi|)^{2s}Fv$. 对于函数 v_0, 我

们有

$$|v_0|^2_{-s}=\int(1+|\xi|)^{-2s}(1+|\xi|)^{4s}|Fv|^2d\xi=|v|^2_s$$

以及
$$(v,\ v_0)_0=\int(1+|\xi|)^{2s}|Fv|^2d\xi=|v|^2_s$$

因此
$$\frac{|(v,\ v_0)_0|}{|v_0|_{-s}}=\frac{|v|^2_s}{|v|_s}=|v|_s$$

这就证明了等式(2-29)中的上确界是一个最大值，并且等于$|v|_s$.

另一个重要的事实是

$$|D^\mu v|_s\leqslant|v|_{s+|\mu|},\ v\in S \tag{2-30}$$

这是从以下事实得到的

$$|\xi^\mu|\leqslant|\xi|^{|\mu|} \tag{2-31}$$

我们需要一种方法，使我们知道什么时候函数属于$C^k(\Omega)$. 为此，我们将利用下面的重要引理.

引理 2-5 设k是非负整数，又设s是一实数，使得$s-k>n/2$. 假定u是$L^2(E^n)$中的一个函数，并且存在S中的函数序列$\{v_n\}$，使得

$$|v_n|_s\leqslant C_1 \tag{2-32}$$

且

$$\|v_n-u\|\to 0,\ \text{当}\ n\to\infty \tag{2-33}$$

则u与$C^k(E^n)$中的一个函数几乎处处相等.

证明　我们将证明不等式

$$\max_{E^n}\sum_{|\mu|\leqslant k}|D^\mu v(x)|\leqslant C_2|v|_s,\ v\in S \tag{2-34}$$

暂时假定(2-34)是成立的，我们令H^s表示S关于范数$|\ \ |_s$的完备化，容易验证H^s是一个 Hilbert 空间. 因此，由 Banach-Saks 定理(见定理 1-9)，$\{v_n\}$有一个子序列，其算术平均$\{w_n\}$在H^s中收敛. 为了记号上的方便，我们假定子序列就是$\{v_n\}$. 则

$$w_n=\frac{(v_1+\cdots+v_n)}{n}$$

且

$$|w_n-w_m|_s\to 0,\ \text{当}\ n,\ m\to\infty\ \text{时} \tag{2-35}$$

容易验证

$$\|w_n-u\|\to 0,\ \text{当}\ n\to\infty\ \text{时} \tag{2-36}$$

由(2-34)和(2-35)，我们有

$$\max_{E^n}\sum_{|\mu|\leqslant k}|D^\mu[w_n(x)-w_m(x)]|\to 0,\ \text{当}\ n,\ m\to 0\ \text{时} \quad (2-37)$$

这就证明了 $\{w_n(x)\}$ 一致收敛到一个函数 $w\in C^k(E^n)$. 现在我们断言 $u=w$ a.e. 因为，我们有

$$\int_{|x|<R}|u-w|^2dx\leqslant 2\int_{|x|<R}|u-w_n|^2dx+2\int_{|x|<R}|w_n-w|^2dx$$

$$\leqslant 2\|u-w_n\|^2+C_R\max_{|x|<R}|w_n(x)-w(x)|^2\to 0,$$

当 $n\to\infty$ 时

因为这个不等式的左端不依赖于 n, 故对于每个 R 我们有

$$\int_{|x|<R}|u-w|^2dx=0.$$

这就证明了 $u=w$ a.e.

所以，余下来要证明的是(2-34). 由反演公式(2-23)，我们有

$$D^\mu v(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x,\xi)}\xi^\mu Fv\,d\xi$$

$$=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x,\xi)}\xi^\mu(1+|\xi|)^{s-k}Fv\cdot(1+|\xi|)^{k-s}d\xi$$

由 Schwarz 不等式(1-62)和(2-31)，因为 $|\mu|\leqslant k$, 得到

$$|D^\mu v(x)|^2\leqslant\int|\xi^\mu|^2(1+|\xi|)^{2(s-k)}|Fv|^2d\xi\int(1+|\xi|)^{2(k-s)}d\xi$$

$$\leqslant|v|_s^2\int(1+|\xi|)^{2(k-s)}d\xi \quad (2-38)$$

为完成证明，还需我们证明的就只是当 $s-k>n/2$ 时上式最后一个积分是有限的. 这是由下列事实推得的，当 $R>1$ 时

$$\int_{|\xi|<R}(1+|\xi|)^{2(k-s)}d\xi\leqslant\left[\int_{|\xi|<1}d\xi+\int_{1<|\xi|<R}|\xi|^{2(k-s)}d\xi\right]$$

$$\leqslant\text{const}\left(1+\int_1^R r^{2(k-s)+n-1}dr\right)$$

因为 $2(k-s)+n<0$, 故最后一个积分当 $R\to\infty$ 时保持有界.

证毕.

如果函数 u 几乎处处等于 $C^k(\Omega)$ 中的一个函数，我们权且就说 u 属于 $C^k(\Omega)$. 如果我们在一个零测集上“修改” u 的函数值，

u 也就真成了这样.

我们将要用到的另一个事实是

引理 2-6 若 $v\in S$, 则对于每个实数 s, 存在常数 c_s, 使得

$$|J_\varepsilon v|_s\leqslant c_s \tag{2-39}$$

(常数 c_s 不依赖于 ε).

证明 设 $k\geqslant 0$ 是 $\geqslant s$ 的整数. 于是, 由于 (2-15), (2-19) 和 (2-27), 由不等式

$$(1+|\xi|)^s\leqslant K\sum_{|\mu|\leqslant k}|\xi^\mu|$$

可推出 $$|J_\varepsilon v|_s\leqslant K\sum_{|\mu|\leqslant k}|D^\mu J_\varepsilon v|_0\leqslant K'\sum_{|\mu|\leqslant k}\|D^\mu v\|$$

这就证明了(2-39).

引理 2-5 被称为 Sobolev 引理. 在 2-5 节中我们将证明不等式(2-39)的一个较强的形式.

在以后的工作中, 引进任意区域 Ω 上的函数集 $S(\Omega)$ 是会带来方便的. 它是由对于每个 k 和 μ, 使

$$(1+|x|)^k|D^\mu v(x)|$$

在 Ω 中有界的函数 $v\in C^\infty(\overline{\Omega})$ 构成的集合. 显然, 当 Ω 是一有界区域时, $S(\Omega)=C^\infty(\overline{\Omega})$.

2-4 椭圆算子

现在我们准备来证明2-1节中答应过要证明的事. 在2-1节中我们对齐次算子定义了椭圆性. 我们把这个定义推广到包括形为

$$P(D)=\sum_{|\mu|\leqslant m}a_\mu D^\mu \tag{2-40}$$

的常系数算子上去. 如果当 $|\mu|=m$ 时不是所有的 a_μ 都等于 0, 我们就说 $P(D)$ 是 m 阶的. 如果 $P(D)$ 是 m 阶的, 令

$$p(D)=\sum_{|\mu|=m}a_\mu D^\mu \tag{2-41}$$

$p(D)$ 称为 $P(D)$ 的主部. 如果 $p(\xi)=0$ 仅有的实解是 $\xi=0$ 的话, 我们就称 $P(D)$ 是椭圆型的. 注意当 $P(D)$ 是齐次算子时, 即当

$P(D)=p(D)$，这个定义和 2-1 节给出的定义是一致的．

我们将证明

定理 2-7 设 $P(D)$ 是常系数椭圆算子，又设 Ω 是 E^n 中任意区域．若 $f\in C^\infty(\Omega)$，则 $P(D)u=f$ 的每个弱解都属于 $C^\infty(\Omega)$．

在开始证明定理 2-7 之前，我们先对椭圆算子作一评注．由定义知道在 E^n 中的集合 $|\xi|=1$ 上 $p(\xi)\neq 0$．因此，函数 $1/p(\xi)$ 在这个闭有界集上是连续的，因而它在这集合上有界．因此

$$\frac{1}{|p(\xi)|}\leqslant M,\quad |\xi|=1$$

这就意味着对于任何实的 ξ，有

$$\frac{1}{|p(\xi/|\xi|)|}\leqslant M$$

或

$$|\xi|^m\leqslant M|p(\xi)|,\ \xi \text{ 实的} \tag{2-42}$$

因为 $P(D)-p(D)$ 的阶数 $<m$，由 (2-31) 我们有

$$|P(\xi)-p(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{m-1} \tag{2-43}$$

(2-42), (2-43) 这两个不等式蕴含着

引理 2-8 若 $P(D)$ 是一个 m 阶椭圆算子，则存在常数 C，使得

$$|v|_s\leqslant C(|P(D)v|_{s-m}+|v|_{s-1}),\ v\in S \tag{2-44}$$

证明　首先注意到存在常数 K，使得

$$(1+|\xi|)^{2m}\leqslant K(1+|\xi|^{2m}) \tag{2-45}$$

事实上，若 $|\xi|\geqslant 1$，则 $(1+|\xi|)^{2m}\leqslant(2|\xi|)^{2m}$，并且 $1+|\xi|^{2m}\geqslant |\xi|^{2m}$．这就证明了

$$\frac{(1+|\xi|)^{2m}}{1+|\xi|^{2m}}\leqslant 2^{2m},\ |\xi|\geqslant 1$$

对于 $|\xi|\leqslant 1$，这个比显然是有界的．现在由 (2-42) 和 (2-43)

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^{2m}&\leqslant K(1+|\xi|^{2m})\leqslant K(1+M^2|p(\xi)|^2)\\&\leqslant K(1+2M^2|P(\xi)|^2+2M^2C^2(1+|\xi|)^{2m-2})\\&\leqslant K(2M^2|P(\xi)|^2+(2M^2C^2+1)(1+|\xi|)^{2m-2})\\&\leqslant K'(|P(\xi)|^2+(1+|\xi|)^{2m-2})\end{aligned}$$

于是在两端同乘 $(1+|\xi|)^{2(s-m)}|Fv|^2$，且对 ξ 积分之．如果我们

注意到由方程(2-22), $P(\xi)Fv=F(P(D)v)$, 我们立即得到不等式(2-44).

利用(2-44),我们可以给出

定理 2-7 的证明　设 φ 是属于 $C_0^\infty(\Omega)$ 的任一个函数,在 Ω 外定义 φu 为零. 我们将看到,对于每个 $s\geqslant 0$, 存在常数 c_s, 使得

$$|J_\varepsilon(\varphi u)|_s\leqslant c_s \tag{2-46}$$

因为

$$\|J_\varepsilon(\varphi u)-\varphi u\|\to 0, \text{ 当 } \varepsilon\to 0 \text{ 时} \tag{2-47}$$

由引理 2-5 得到 $\varphi u\in C^\infty(E^n)$. 现在, 对任何点 $y\in\Omega$, 可以找到一个 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, φ 在 y 的一个邻域中不等于零(例如参看 1-3 节的(1-36)和(1-37)). 因此, 函数 $1/\varphi$ 在这个邻域中属于 C^∞. 因为 $u=(\varphi u)\cdot(1/\varphi)$ 我们知道在这个邻域中 $u\in C^\infty$, 因为 y 是 Ω 的任意一点,由此推出 $u\in C^\infty(\Omega)$.

为证明 (2-46), 我们首先注意到对任何 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 和每个 $\varepsilon>0$, 函数 $J_\varepsilon(\varphi u)$ 属于 S. 因此,由引理 2-8,

$$|J_\varepsilon(\varphi u)|_s\leqslant C(|P(D)J_\varepsilon(\varphi u)|_{s-m}+|J_\varepsilon(\varphi u)|_{s-1}) \tag{2-48}$$

为计算右端的第一项,我们注意到, 由于 1-7 节的(1-102), 对于 $v\in S$, 我们有

$$\begin{aligned}(P(D)J_\varepsilon(\varphi u),\ v)&=(u,\ \varphi\bar{P}(D)J_\varepsilon v)\\&=(u,\ \bar{P}(D)(\varphi J_\varepsilon v))-\sum_{|\mu|>0}\frac{1}{\mu!}(u,\ \bar{P}^{(\mu)}(D)J_\varepsilon vD^\mu\varphi)\\&=(f,\ \varphi J_\varepsilon v)-\sum_{|\mu|>0}\frac{(J_\varepsilon(uD^\mu\varphi),\ \bar{P}^{(\mu)}(D)v)}{\mu!}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|(P(D)J_\varepsilon(\varphi u),\ v)|&\leqslant|J_\varepsilon(\varphi f)|_{s-m}|v|_{m-s}\\&\quad+\sum_{|\mu|>0}\frac{(|J_\varepsilon(uD^\mu\varphi)|_{s-1}|\bar{P}^{(\mu)}(D)v|_{1-s})}{\mu!}\\&\leqslant K_1|v|_{m-s}(|J_\varepsilon(\varphi f)|_{s-m}+\sum_{0<|\mu|\leqslant m}|J_\varepsilon(uD^\mu\varphi)|_{s-1})\end{aligned} \tag{2-49}$$

这里我们已经用了 (2-30) 和对于 $|\mu|>0$, $P^{(\mu)}(D)$ 的阶数 $<m$ 这一事实. 因为(2-49)对所有的 $v\in S$ 成立,由等式(2-27)和(2-29)我们有

$$|P(D)J_s(\varphi u)|_{s-m}\leqslant(2\pi)^n K_1(|J_s(\varphi f)|_{s-m}$$
$$+\sum_{0\neq|\mu|\leqslant m}|J_s(uD^\mu\varphi)|_{s-1})$$

代入(2-48)，有

$$|J_s(\varphi u)|_s\leqslant C'(|J_s(\varphi f)|_{s-m}+\sum_{|\mu|\leqslant m}|J_s(uD^\mu\varphi)|_{s-1}) \quad (2-50)$$

现在 $\varphi f\in C_0^\infty(\Omega)\subset S$. 因此，由引理 2-6，对于每个 s

$$|J_s(\varphi f)|_{s-m}\leqslant c_s \quad (2-51)$$

现假定 s 固定，又假定对于每个 $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$，存在常数 C，使得

$$|J_s(\varphi u)|_{s-1}\leqslant C \quad (2-52)$$

设 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 给定. 那么，由(2-52)

$$\sum_{|\mu|\leqslant m}|J_s(uD^\mu\varphi)|_{s-1}\leqslant C' \quad (2-53)$$

把不等式(2-51)和(2-53)应用到(2-50)上去，我们看到

$$|J_s(\varphi u)|_s\leqslant C'. \quad (2-54)$$

对于每个 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，(2-54)都是对的. 因此，对于每个 $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$ (2-52)成立这件事蕴含着对于每个 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ (2-54)成立. 现在我们对 s 做归纳法. 根据假设，对 $s=1$，(2-52)成立. 刚才我们已经证明若它对 $(s-1)$ 成立，则它对 s 也成立. 这就证明了对每个 s (2-46)成立，从而完成了定理的证明.

2-5 Fourier 变换

在本节中我们将给出在证明定理 2-7 的过程中已经用到的等式(2-23)和(2-24)的证明.

我们首先指出只要对 $n=1$ 证明这两个恒等式就足够了. 因为；若 $n>1$，令

$$F_k v=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi_k x_k}v\,dx_k$$

$$G_k w=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix_k\xi_k}w\,d\xi_k$$

则 F_k 和 G_k 是可交换的并且把 S 映到 S 中. 而且 $F=F_1\cdots F_n$，又若我们令 $G=G_1\cdots G_n$，则等式(2-23)就是

$$v = GFv,\ v \in S \tag{2-55}$$

如果我们能证明

$$v = G_k F_k v,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ v \in S \tag{2-56}$$

那么这就蕴含着等式(2-55). 但等式(2-56)恰好是类似于等式(2-55)的一维的等式. 类似地, 从应用到每个 k 上去的

$$\int_{-\infty}^{\infty} v\bar{w}\, dx_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_k v \overline{F_k w}\, d\xi_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ v,\ w \in S$$

即可得到等式(2-24). 因此, 我们可以假定 $n=1$.

为证等式(2-23), 令

$$\begin{aligned} G_R(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{ix\xi} Fv\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{ix\xi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} v(y)\, dy\right] d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(y)\left[\int_{-R}^{R} e^{i\xi(x-y)}\, d\xi\right] dy \end{aligned} \tag{2-57}$$

因为累次积分是绝对收敛的, 所以我们可以交换积分次序(可查阅任何一本好的高等微积分教材). 令 $t=y-x$, 我们有

$$\begin{aligned} G_R(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(x+t)\left[\int_{-R}^{R} e^{-i\xi t}\, d\xi\right] dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Rt}{t}\, v(x+t)\, dt \end{aligned} \tag{2-58}$$

这里我们已经用了

$$\int_{-R}^{R} e^{i\xi t}\, d\xi = \int_{-R}^{R} (\cos \xi t - i \sin \xi t)\, d\xi = 2t^{-1} \sin Rt$$

众所周知 $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Rt}{t}\, dt = \pi$$

因此 $$G_R(x) - v(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{v(x+t)-v(x)}{t}\right] \sin Rt\, dt$$

分部积分, 我们得到

$$\begin{aligned} G_R(x) - v(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{v(x+t)-v(x)}{t}\right] d\left(-\frac{\cos Rt}{R}\right) \\ &= \frac{1}{\pi R}\int_{-\infty}^{\infty} \cos Rt\, \frac{d}{dt}\left[\frac{v(x+t)-v(x)}{t}\right] dt \end{aligned} \tag{2-59}$$

现令

$$H(x,\ t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{v(x+t)-v(x)}{t}\right]$$
$$=\frac{tv'(x+t)-v(x+t)+v(x)}{t^2}$$

把函数 $tv'(x+t)-v(x+t)$ 展成带余项的 Taylor 级数，我们有

$$tv'(x+t)-v(x+t)+v(x)=\frac{1}{2}t^2(v''(x+t_1)+t_1v'''(x+t_1))$$

其中 t_1 在 0 和 t 之间．因为 $v\in S$，这就证明了 $H(x,\ t)$ 关于 $(x,\ t)$ 是连续的，从而存在常数 K_1，使得对所有的 x，t，有

$$|H(x,\ t)|\leqslant K_1$$

此外，对于 $v\in S$，因为 $v(x)$，$v(x+t)$，和 $(x+t)v'(x+t)$ 都是有界的，对于某个常数 K_2，我们有

$$|tv'(x+t)-v(x+t)+v(x)|\leqslant K_2(1+|x|)$$

因此，由等式(2-59)

$$|G_R(x)-v(x)|\leqslant\frac{1}{\pi R}\int_{-\infty}^{\infty}|H(x,\ t)|dt$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi R}\left[2K_1+(1+|x|)K_2\int_{|t|>1}|t|^{-2}dt\right] \tag{2-60}$$

这就证明了，当 $R\to\infty$ 时，$G_R(x)\to v(x)$，从而证明了等式(2-23)．这也证明了，如果我们把 x 限制在某个区间 $|x|\leqslant M$ 上，则收敛是一致的．

为证等式(2-24)，我们写下[1)]

$$\int_{-M}^{M}\overline{w(x)}v(x)dx=(2\pi)^{-n}\int_{-M}^{M}\overline{w(x)}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}Fv\,d\xi\right]dx$$
$$=(2\pi)^{-n}\int_{-\infty}^{\infty}Fv\left[\int_{-M}^{M}e^{ix\xi}\overline{w(x)}\,dx\right]d\xi$$
$$=(2\pi)^{-n}\int_{-\infty}^{\infty}Fv\overline{Fw}\,d\xi$$
$$-(2\pi)^{-n}\int_{-\infty}^{\infty}Fv\left[\int_{|x|>M}e^{ix\xi}\overline{w(x)}\,dx\right]d\xi$$

1）原书有误．——校者注

但是

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} Fv\left[\int_{|x|>M} e^{ix\xi}\overline{w(x)}dx\right]d\xi\right|$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|Fv|d\xi\int_{|x|>M}|w(x)|dx\to 0, \text{ 当 } M\to\infty \text{ 时}$$

因此 $$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\overline{w(x)}\,dx=(2\pi)^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} Fv\overline{Fw}\,d\xi$$ 证毕.

Fourier 变换的另一个重要性质是由下述定理给出的.

定理 2–9 若 v, $w\in S$, 并且

$$h(x)=\int v(y)w(x-y)dy \tag{2-61}$$

则 $h\in S$, 且 $$Fh=Fv\cdot Fw$$

证明 首先我们注意到 Fv 和 Fw 都属于 S, 因此 $Fv\cdot Fw$ 也属于 S. 因此,根据等式(2–23),

$$G[Fv\cdot Fw]=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x,\xi)}Fv(\xi)\cdot Fw(\xi)d\xi$$

$$=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x,\xi)}Fw(\xi)\left[\int e^{-i(\xi,y)}v(y)dy\right]d\xi$$

$$=(2\pi)^{-n}\int v(y)\left[\int e^{i(\xi,x-y)}Fw(\xi)d\xi\right]dy$$

$$=\int v(y)w(x-y)dy$$

也属于 S. 注意, 上式中可以交换积分次序是因为这些累次积分都是绝对收敛的. 这就完成了证明.

作为定理 2–9 的一个应用我们指出,对于 $v\in S$

$$F(J_\varepsilon v)=Fj_\varepsilon Fv$$

而且

$$Fj_\varepsilon(\xi)=\int e^{-i(\xi,x)}j_\varepsilon(x)dx=\varepsilon^{-n}\int e^{-i(\xi,x)}j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx$$

$$=\int e^{-i(\varepsilon\xi,y)}j(y)dy=Fj(\varepsilon\xi)$$

因此

$$F(J_\varepsilon v)=Fj(\varepsilon\xi)\cdot Fv \tag{2-62}$$

注意到 $$|Fj_\varepsilon(\xi)|=|Fj(\varepsilon\xi)|\leqslant\int j(y)dy=1$$

因此，若 $v\in S$，我们有

$$|J_\varepsilon v|_s^2=\int(1+|\xi|)^{2s}|F(J_\varepsilon v)|^2d\xi$$
$$=\int(1+|\xi|)^{2s}|Fj_\varepsilon(\xi)|^2|Fv|^2d\xi$$
$$\leqslant\int(1+|\xi|)^{2s}|Fv|^2d\xi=|v|_s^2$$

因此，我们有

$$|J_\varepsilon v|_s\leqslant|v|_s,\ v\in S,\ s\text{ 实数} \tag{2-63}$$

通过完备化知道，对于 $v\in H^s$(2-63) 也成立．我们也有

$$|J_\varepsilon v-v|_s\to 0,\ \text{当 }\varepsilon\to 0,\ v\in H^s \tag{2-64}$$

因为 S 在 H^s 中稠密以及 (2-63) 成立，所以只要对于 $v\in S$ 证明 (2-64)就够了．事实上，若 $u\in H^s$ 而 $\rho>0$ 是给定的，则存在 $v\in S$，使得

$$|v-u|_s<\frac{\rho}{3}$$

因此

$$|J_\varepsilon u-u|_s\leqslant|J_\varepsilon(u-v)|_s+|J_\varepsilon v-v|_s+|v-u|_s$$
$$<\frac{2\rho}{3}+|J_\varepsilon v-v|_s$$

若对于 v，(2-64)成立，则我们可取 ε 如此小使得 $|J_\varepsilon v-v|_s<\rho/3$．因此

$$|J_\varepsilon u-u|_s<\rho$$

这就证明了对于 u(2-64)是成立的．

为了证明对于 $v\in S$ (2-64)成立，注意到，由等式(2-62)，有

$$|J_\varepsilon v-v|_s^2=\int|Fj(\varepsilon\xi)-1|^2|Fv|^2(1+|\xi|)^{2s}d\xi$$

而且

$$|Fj(\varepsilon\xi)-1|\leqslant\int|e^{-i\varepsilon(\xi,y)}-1|j(y)dy$$
$$\leqslant\varepsilon|\xi|\int|y|j(y)dy \tag{2-65}$$

(2-65)是由不等式

$$|e^{-i\theta}-1|\leqslant|\theta| \tag{2-66}$$

得到的，而(2-66)又是由如下事实得到的，即

$$2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=e^{i\theta/2}(1-e^{-i\theta})$$

因此

$$|J_\varepsilon v-v|_s^2\leqslant\varepsilon^2\left(\int|y|j(y)dy\right)^2\int|\xi|^2(1+|\xi|)^{2s}|Fv|^2d\xi\to 0,$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时

作为定理 2-9 的对偶，我们有

定理 2-10

$$F(vw)=(2\pi)^{-n}\int Fv(\eta)Fw(\xi-\eta)d\eta,\quad v,\ w\in S$$

证明 根据等式(2-55)

$$\begin{aligned}F(vw)&=F(wGFv)\\&=(2\pi)^{-n}\int e^{-i(\xi,x)}w(x)\left[\int e^{i(x,\eta)}Fv(\eta)d\eta\right]dx\\&=(2\pi)^{-n}\int Fv(\eta)\left[\int e^{-i(\xi-\eta,x)}w(x)dx\right]d\eta\\&=(2\pi)^{-n}\int Fv(\eta)Fw(\xi-\eta)d\eta\end{aligned}$$

2-6 次椭圆算子

现在让我们来看一下对于非齐次算子来说不等式(2-9)蕴含着什么. 为了获得一种想法，设 θ_j 是 E^n 中这样的向量；除第 j 个分量等于1外，其余的分量都等于零. 因此，$\theta_1=(1,0,\cdots,0)$，$\theta_2=(0,1,0,\cdots,0)$，等等. 设 $P(\xi)$ 是满足(2-9)的多项式，并令

$$g_j(t)=P(\xi+t\theta_j),\ 1\leqslant j\leqslant n \tag{2-67}$$

对于固定的 ξ，$g_j(t)$ 是关于 t 的次数 $m_j\leqslant m$ 的多项式，因此，有 m_j 个复根 $t_1,\cdots,t_{m_j}$. 因此

$$\frac{g_j'(t)}{g_j(t)}=\sum_1^{m_j}\frac{1}{t-t_k} \tag{2-68}$$

因为 $P(\xi+t_k\theta_j)=0$，由(2-9)，我们有

$$|\xi+t_k\theta_j|\leqslant C_0e^{2R|\mathrm{Im}\,t_k|} \tag{2-69}$$

或
$$|\xi|\leqslant|t_k|+C_0e^{2R|\mathrm{Im}\,t_k|}$$

这就证明了，当$|\xi|\to\infty$时$|t_k|\to\infty$. 但是

$$\left|\frac{P^{(j)}(\xi)}{P(\xi)}\right|=\left|\frac{g_j'(0)}{g_j(0)}\right|\leqslant\sum_1^{m_j}\frac{1}{|t_k|} \tag{2-70}$$

这里，象通常那样，$P^{(j)}(\xi)=\partial P(\xi)/\partial\xi_j$. 因此，(2-9)蕴含着

$$\left|\frac{P^{(j)}(\xi)}{P(\xi)}\right|\to 0,\ \text{当}\ |\xi|\to\infty,\ 1\leqslant j\leqslant n\ \text{时} \tag{2-71}$$

因此，$P(D)u=0$的每个弱解属于$C^1(\Omega)$的一个必要条件是(2-71)式成立. 但是(2-71)式蕴含着存在常数$a>0$, C_1和C_2使得

$$\left|\frac{P^{(j)}(\xi)}{P(\xi)}\right|\leqslant\frac{C_1}{|\xi|^a},\quad |\xi|>C_2,\ 1\leqslant j\leqslant n \tag{2-72}$$

对于这一点不应感到惊奇，因为两个多项式的比是一有理函数. 如果当$|\xi|\to\infty$时这个有理函数趋于零，那么它应该以一种"代数"方式——在(2-72)的意义下——趋于零. 我们将不证明(2-72)而只是假定它成立，因为(2-72)的证明是代数性质的，而且将使我们离题太远. 我们将把满足(2-72)的多项式(及其相应的算子)称为**次椭圆的**. 我们将证明

定理 2-11 设$P(D)$是一个次椭圆算子，且设Ω是任何一个区域. 若$f\in C^\infty(\Omega)$，则$P(D)u=f$的每个弱解属于$C^\infty(\Omega)$，因此是一个古典解.

我们将在2-7节中发展一些准备知识，而后再在2-8节中证明定理2-11.

不等式(2-72)和定理2-11属于Hörmander(1955).

2-7 算子的比较

多项式$Q(\xi)$叫做**弱于**多项式$P(\xi)$，如果存在常数C，使得

$$|Q(\xi)|\leqslant C\sum_\mu|P^{(\mu)}(\xi)| \tag{2-73}$$

这时，根据等式(2-27)以及(2-22)，对于$\varphi\in S$，我们有

$$\begin{aligned}\|Q(D)\varphi\|^2&=(2\pi)^{-n}\int|F[Q(D)\varphi]|^2d\xi\\&=(2\pi)^{-n}\int|Q(\xi)F\varphi|^2d\xi\leqslant C_1\sum\int|P^{(\mu)}(\xi)F\varphi|^2d\xi\\&=C_1\sum\int|F[P^{(\mu)}(D)\varphi]|^2d\xi\\&=(2\pi)^nC_1\sum\|P^{(\mu)}(D)\varphi\|^2\end{aligned}$$

如果现在我们应用1-7节的推论1-16，对于每个有界区域Ω，我们得到

$$\|Q(D)\varphi\|\leqslant C_2\|P(D)\varphi\|,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega)\tag{2-74}$$

我们还有下面的定理.

定理2-12 若$Q(\xi)$弱于$P(\xi)$，则对于每个实的s和每个有界域Ω，存在常数C，使得

$$|Q(D)\varphi|_s\leqslant C|P(D)\varphi|_s,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega)\tag{2-75}$$

在证明定理2-12时，我们将用到下面的两个引理.

引理2-13 若$Q(\xi)$弱于$P(\xi)$，并且对于某个整数$k\geqslant0$，$R(\xi)=(1+|\xi|^2)^k$，则QR弱于PR.

引理2-14 若$s<0$，则对于每个$b>0$，存在常数K，使得

$$K^{-1}|v|_s^2\leqslant\int_0^b\|J_\varepsilon v\|^2\varepsilon^{-2s-1}d\varepsilon\leqslant K|v|_s^2,\ v\in S\tag{2-76}$$

定理2-12的证明　我们暂时假定引理2-13和2-14成立而来证明从这两个引理可以推出定理2-12. 若$s<0$，由不等式(2-76)和(2-74)，我们有

$$\begin{aligned}|Q(D)\varphi|_s^2&\leqslant K\int_0^b\|J_\varepsilon Q(D)\varphi\|^2\varepsilon^{-2s-1}\,d\varepsilon\\&\leqslant KC'\int_0^b\|P(D)J_\varepsilon\varphi\|^2\varepsilon^{-2s-1}d\varepsilon\\&\leqslant K^2C'|P(D)\varphi|_s^2\end{aligned}$$

注意到我们已经用了如下两个事实：J_ε和微商可交换；对某个较大的区域Ω_1，$J_\varepsilon\varphi$属于$C_0^\infty(\Omega_1)$.

现在，若$s>0$，则k是一个$\geqslant s/2$的整数，又令

$$R(\xi)=(1+|\xi|^2)^k$$

注意到 $R(\xi)$ 是 ξ 的多项式．令

$$Q_1(\xi)=Q(\xi)R(\xi),\ P_1(\xi)=P(\xi)R(\xi)$$

于是，由引理 2-13，Q_1 弱于 P_1．而且，根据已经证明过的那部分结论，有

$$\begin{aligned}|Q(D)\varphi|_s^2&=\int|Q_1(\xi)F\varphi|^2(1+|\xi|)^{2s}(1+|\xi|^2)^{-2k}d\xi\\&\leqslant C_3\int|Q_1(\xi)F\varphi|^2(1+|\xi|)^{2s-4k}d\xi\\&=C_3|Q_1(D)\varphi|_{s-2k}^2\leqslant C_4|P_1(D)\varphi|_{s-2k}^2\\&=C_4\int|P(\xi)F\varphi|^2(1+|\xi|)^{2s-4k}(1+|\xi|^2)^{2k}d\xi\\&\leqslant C_5\int|P(\xi)F\varphi|^2(1+|\xi|)^{2s}d\xi=C_5|P(D)\varphi|_s^2\end{aligned}$$

我们已经利用了下面平凡的不等式

$$\frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\xi|^2)^k}+\frac{(1+|\xi|^2)^k}{(1+|\xi|^{2k})}\leqslant\text{常数}\tag{2-77}$$

这就完成了证明．

引理 2-13 的证明　利用了将在下一章中给出（见 3-4 节引理 3-14）的关于多项式的一个简单的结果．引理 3-14 将证明，在 E^n 中存在实向量 $\theta_1,\cdots,\theta_r$，使得

$$\sum|P^{(\mu)}(\xi)|\leqslant C\sum|P(\xi+\theta_j)|\tag{2-78}$$

其中常数 C 与 ξ 或 $P(\xi)$ 无关．现在，对于每个固定的 $\theta\in E^n$，存在一个只依赖于 $|\theta|$ 的常数 C_θ，使得

$$1+|\xi+\theta|^2\leqslant C_\theta(1+|\xi|^2)\tag{2-79}$$

因此存在一个只依赖于 $|\theta_j|$ 和 k 的常数 C，使得

$$|R(\xi)|\leqslant C|R(\xi+\theta_j)|,\quad 1\leqslant j\leqslant r\tag{2-80}$$

结合(2-78)和(2-80)，我们得到

$$\begin{aligned}\sum|P^{(\mu)}(\xi)R(\xi)|&\leqslant C\sum|P_1(\xi+\theta_j)|\\&\leqslant C\sum\frac{|P_1^{(\mu)}(\xi)\theta_j^\mu|}{\mu!}\leqslant C'\sum|P_1^{(\mu)}(\xi)|\end{aligned}$$

其中 $P_1(\xi)=P(\xi)R(\xi)$．因为 $Q(\xi)$ 弱于 $P(\xi)$，我们有

$$|Q(\xi)R(\xi)|\leqslant C\sum|P^{(\mu)}(\xi)R(\xi)|$$

把最后两个不等式结合起来，我们就得到所要的结果. (2-78)的证明将在3-4节末给出.

引理 2-14 的证明　由(2-27)和(2-62)

$$(2\pi)^n\|J_\varepsilon v\|^2=\int|F(J_\varepsilon v)|^2d\xi=\int|Fj(\varepsilon\xi)|^2|Fv|^2d\xi$$

因此 $$\int_0^b\|J_\varepsilon v\|^2\varepsilon^{-2s-1}d\varepsilon=(2\pi)^{-n}\int h(\xi)|Fv|^2d\xi$$

其中 $$h(\xi)=\int_0^b|Fj(\varepsilon\xi)|^2\varepsilon^{-2s-1}d\varepsilon$$

因此 $$h(\xi)\leqslant\frac{-1}{2sb^{2s}}$$

对于 $|\xi|>1$ 我们可以得到一个更好的估计. 令 $t=\varepsilon(1+|\xi|)$ 以及 $\eta=\xi/(1+|\xi|)$. 于是 $|\eta|>\frac{1}{2}$, 并且

$$h(\xi)\leqslant(1+|\xi|)^{2s}\int_0^\infty|Fj(t\eta)|^2t^{-2s-1}dt$$

因为 $j(x)\in S$, 对于任何整数 k, 我们有

$$|Fj(\xi)|\leqslant\frac{K}{(1+|\xi|)^k}$$

特别是, 上式对于 $k>1-2s$ 成立. 因此

$$\int_0^\infty|Fj(t\eta)|t^{-2s-1}dt\leqslant K\int_0^\infty\frac{t^{-2s-1}}{(1+t|\eta|)^k}dt$$

$$=K|\eta|^{2s}\int_0^\infty\frac{r^{-2s-1}}{(1+r)^k}dr\leqslant K'$$

因此, 存在常数 M, 使得

$$h(\xi)\leqslant M(1+|\xi|)^{2s}\tag{2-81}$$

这就证明了(2-76)中的第二个不等式. 为证明第一个不等式, 注意到

$$Fj(0)=\int j(x)dx=1$$

因此, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|Fj(\xi)|^2>\frac{1}{2},\ 对于\ |\xi|<\delta$$

于是，对于 $b|\xi|\leqslant\delta$，我们有

$$h(\xi)\geqslant\frac{1}{2}\int_0^b \varepsilon^{-2s-1}d\varepsilon=\frac{-b^{-2s}}{4s} \tag{2-82}$$

若 $b|\xi|>\delta$，则

$$h(\xi)\geqslant\int_0^{\delta/|\xi|}|Fj(\varepsilon\xi)|^2\varepsilon^{-2s-1}d\varepsilon$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int_0^{\delta/|\xi|}\varepsilon^{-2s-1}d\varepsilon=-\frac{\delta^{-2s}}{4s}|\xi|^{2s} \tag{2-83}$$

把(2-82)和(2-83)结合起来，我们就知道存在常数 $m>0$，使得

$$h(\xi)\geqslant m(1+|\xi|)^{2s}$$

这就完成了证明．引理 2-14 是属于 Hörmander 的(1958)．

2-8　正则性的证明

现在我们准备给出定理 2-11 的证明．证法很接近定理 2-7 的证明．

考虑范数

$$\|v\|_s=\sum_{|\mu|\neq 0}|P^{(\mu)}(D)v|_s$$

利用这个范数，有

$$\|v\|_{s+a}\leqslant C(|P(D)v|_s+|v|_s),\quad v\in C_0^\infty(\Omega) \tag{2-84}$$

其中 $a>0$ 是出现在不等式 (2-72) 中的常数，而 Ω 是一个有界区域．为了证明(2-84)．注意到，对于$|\mu|\neq 0$，对于某个 j，$1\leqslant j\leqslant n$，$P^{(\mu)}(\xi)$弱于 $P^{(j)}(\xi)$．因此，由定理 2-12，

$$\|v\|_{s+a}\leqslant C_1\sum_1^n|P^{(j)}(D)v|_{s+a},\ v\in C_0^\infty(\Omega)$$

而且，由(2-72)

$$(1+|\xi|)^{2a}\sum_1^n|P^{(j)}(\xi)|^2\leqslant C_2(|P(\xi)|^2+1),\ \xi\in E^n$$

这些不等式蕴含着(2-84)．现在假定 u 是 $P(D)u=f$ 在某个区域 Ω_0 中的一个弱解．设 Ω 是 Ω_0 的任何有界子区域，于是

$$(u,\ \overline{P}(D)w)=(f,\ w),\quad w\in C_0^\infty(\Omega) \tag{2-85}$$

我们将证明对于每个实的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，以及每个实数 s，存在常数 K，使得

$$\|J_s(\varphi u)\|_s\leqslant K \tag{2-86}$$

于是从引理 2-5 推得对于每个这样的 φ，$\varphi u\in C^\infty(\Omega)$．因此，立即得到 $u\in C^\infty(\Omega)$．我们将通过以下步骤来证明(2-86)：

1．如果当 $s=t$ 时，对任意的 φ，(2-86)成立，则当 $s=t+a$ 时，对于任何的 φ，(2-86)也成立；

2．当 $s=-m$ 时，(2-86)成立．

因为 $a>0$，那么由归纳法立即得到对于每个 s 和 φ，(2-86)成立．

为了实现 1 和 2 两步证明，设 φ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的任何实值函数，而 v 是 S 中的任何函数．则

$$\begin{aligned}(P(D)J_s(\varphi u),v)&=(\varphi u,\ \bar{P}(D)J_sv)\\&=(u,\ \bar{P}(D)(\varphi J_sv))-\sum_{|\mu|>0}\frac{(u,\ \bar{P}^{(\mu)}(D)J_svD^\mu\varphi)}{\mu!}\\&=(f,\ \varphi J_sv)-\sum_{|\mu|>0}\frac{(P^{(\mu)}(D)J_s(uD^\mu\varphi),v)}{\mu!}\end{aligned}$$

这里我们已经用了 1–7 节中的等式(1–102)．因此

$$\begin{aligned}&|(P(D)J_s(\varphi u),v)|\\&\leqslant|v|_{-s}\left(|J_s(\varphi f)|_s+\sum_{|\mu|>0}\frac{|P^{(\mu)}(D)J_s(uD^\mu\varphi)|_s}{\mu!}\right)\\&\leqslant|v|_{-s}(|J_s(\varphi f)|_s+C\sum_{|\mu|\leqslant m}\|J_s(uD^\mu\varphi)\|_s)\end{aligned}$$

于是，由等式(2–29)和不等式(2–84)

$$\|J_s(\varphi u)\|_{s+a}\leqslant C(|J_s(\varphi f)|_s+\sum_{|\mu|\leqslant m}\|J_s(uD^\mu\varphi)\|_s) \tag{2-87}$$

现在，由引理 2–6，对每个 s 和 φ 有，

$$|J_s(\varphi f)|_s\leqslant\text{常数}$$

现在，假定对于每个 $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\|J_s(\psi u)\|_s\leqslant\text{常数} \tag{2-88}$$

则(2–87)表明对每个 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\|J_s(\varphi u)\|_{s+a}\leqslant\text{常数}$$

此外，当 $s=-m$ 时(2-88)成立．事实上，根据不等式(2-30)和(2-15)，我们有

$$|P^{(\mu)}(D)J_s(\psi u)|_{-m}\leqslant C|J_s(\psi u)|_0\leqslant C'\|\psi u\|$$

因为 $u\in L^2(\Omega)$，所以它是有限的．因此，我们可以用归纳法去得到结论：对每个 s 和 ψ，(2-88)成立．因为存在 $\mu\neq 0$，使得 $P^{(\mu)}(\xi)=$ 常数 $\neq 0$，所以对所有的 s 和 ψ，我们有

$$|J_s(\psi u)|_s\leqslant \text{常数}$$

这就证明了 $u\in C^\infty(\Omega)$．因为 Ω 是 Ω_0 的任何子区域定理就得到了．

2-9 闭图象定理

在 2-1 节中我们利用了下面的定理．本节中我们给出它的证明．

定理 2-15 闭图象定理 设 A 是从 Hilbert 空间 χ 到 Hilbert 空间 Y 的一个线性算子，它是在 χ 上处处有定义的，并且使得

$$x_n\to x\quad \text{在 } \chi \text{ 中},\ Ax_n\to y\quad \text{在 } Y \text{ 中} \tag{2-89}$$

就能推出 $Ax=y$．那么，存在常数 C，使得

$$\|Ax\|\leqslant C\|x\|\quad x\in\chi \tag{2-90}$$

证明 设 D 是由 Y 中的下列点 y 构成的集合：对于这些 $y\in Y$ 存在 $y^*\in\chi$，满足

$$(y,\ Ax)=(y^*,x)\quad x\in\chi \tag{2-91}$$

显然 D 是 Y 的子空间．注意 y^* 是唯一的．因为，如果存在另一个元素 $z\in\chi$，满足

$$(y,\ Ax)=(z,\ x),\ \ x\in\chi$$

则
$$((y^*-z),x)=0,\ x\in\chi$$

取 $x=y^*-z$．则 $\|y^*-z\|=0$，这就证明了 $z=y^*$．

我们将证明

1．存在常数 C，使得

$$\|y^*\|\leqslant C\|y\|,\ \ y\in D \tag{2-92}$$

2. $\bar{D}=Y$

暂时假定1, 2成立. 我们来说明怎样由此推出闭图象定理. 若(2-90)不对,就应存在 χ 中的一个元素序列$\{x_n\}$, 使得

$$\|x_n\|=1 \quad \|Ax_n\|\to\infty \quad 在 Y 中, 当 n\to\infty \tag{2-93}$$

于是,由(2-91), (2-92)和(2-93),对所有的 $y\in D$, 有

$$|(y, Ax_n)|=|(y^*, x_n)|\leqslant\|y^*\|\|x_n\|\leqslant C\|y\|$$

若 y 是 Y 的任一元素, 于是, 根据2, 存在 D 中的元素序列 $\{y_k\}$, $\{y_k\}$ 收敛到 y. 因为

$$|(y_k, Ax_n)|\leqslant C\|y_k\|, \quad k=1, 2, \cdots$$

取极限,对每个 n, 我们有

$$|(y, Ax_n)|\leqslant C\|y\|, \quad y\in Y \tag{2-94}$$

令 $y=Ax_n$ 我们有

$$\|Ax_n\|^2\leqslant C\|Ax_n\|$$

或

$$\|Ax_n\|\leqslant C$$

这和(2-93)矛盾. 因此剩下只要证明1和2.

为证明1, 假定存在 D 中元素序列 $\{y_n\}$, 使得

$$\|y_n\|=1 \quad \|y_n^*\|\to\infty, \quad 当 n\to\infty 时 \tag{2-95}$$

令

$$F_n(x)=(Ax, y_n)=(x, y_n^*)$$

因为

$$|F_n(x)|\leqslant\|y_n^*\|\|x\|$$

我们看见, 对于每个 n, $F_n(x)$是 χ 上的有界线性泛函. 另一方面

$$|F_n(x)|\leqslant\|Ax\|\|y_n\|=\|Ax\|$$

这就证明了对每个 x

$$\operatorname*{lub}_n|F_n(x)|\leqslant\|Ax\|$$

$$<\infty$$

现在我们可以把 Banach-Steinhaus 定理 (1-5节定理1-10) 应用到序列 $\{F_n\}$ 上去. 因此,存在常数 C, 使得

$$|F_n(x)|\leqslant C\|x\|, \quad x\in\chi$$

换句话说

$$|(x, y_n^*)|\leqslant C\|x\|, \quad x\in\chi$$

取 $x=y_n^*$. 于是

$$\|y_n^*\|^2\leqslant C\|y_n^*\|$$

或 $$\|y_n^*\|\leqslant C$$
与(2-95)矛盾.

为证 2, 设 H 是由 $x\in\chi$ 和 $y\in Y$ 的有序元素对 $\{x, y\}$ 构成的集合. 如果我们定义

$$\alpha\{x, y\}=\{\alpha x, \alpha y\}$$
$$\{x_1, y_1\}+\{x_2, y_2\}=\{x_1+x_2, y_1+y_2\}$$
$$(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\})=(x_1, x_2)+(y_1, y_2)$$

则 H 变成一个 Hilbert 空间. 这叫做 χ 和 Y 的**笛卡尔积空间** (Cartesian product), 并记作 $\chi\times Y$.

现在令 G_A 是由 H 中形为 $\{x, Ax\}$ 的元素的集合. G_A 称为 A 的**图象**(其理由不难解释). 我们断言 G_A 是 H 的闭子空间. 事实上, 若在 H 中 $\{x_n, Ax_n\}\to\{x, y\}$, 则(2-89)成立, 并且根据假设 $Ax=y$. 因此, $\{x, y\}\in G_A$.

我们还要指出 $G_A^\perp$ 是由 H 中形为 $\{-y^*, y\}$, $y\in D$ 的那些元素组成的. 由等式 (2-91) 这些元素显然在 $G_A^\perp$ 中, 而且若 $\{z, y\}\in G_A^\perp$, 则

$$(z, x)+(y, Ax)=0,\ x\in\chi$$

这就证明了 $y\in D$ 和 $z=-y^*$.

现假定 $\overline{D}\neq Y$. 则由 1-5 节的推论 1-4, 在 Y 中存在一个 $w\neq 0$, 使得 $(w, \overline{D})=0$. 所以对每个 $y\in D$

$$(\{0, w\}, \{-y^*, y\})=-(0, y^*)+(w, y)=0$$

这就证明了元素 $\{0, w\}$ 属于 $(G_A^\perp)^\perp$. 但根据 1-5 节中的引理 1-7 子空间 $(G_A^\perp)^\perp$ 正好是 G_A. 因此, 存在一个 $x\in\chi$ 使得 $\{x, Ax\}=\{0, w\}$. 但若 $x=0$, 则 $Ax=0$, 这就证明了 $w=0$. 这就和假定 $\overline{D}\neq Y$ 相矛盾, 从而完成了证明.

习　题

2-1　证明命题(2-17)和等式(2-18), (2-19).

2-2　证明等式(2-21)和(2-22).

2-3　证明对于每个 s, H^s 是 Hilbert 空间.

2-4 证明命题(2-36).

2-5 证明等式(2-58)后面的恒等式.

2-6 证明不等式(2-66).

2-7 证明不等式(2-77).

2-8 证明不等式(2-79).

2-9 若$P(\xi)$满足不等式(2-72),证明对每个实数s

$$|P^{(j)}(D)v|_{s+a}\leqslant C(|P(D)v|_s+|v|_s),\quad v\in S$$

2-10 证明(2-72)蕴含着$a\leqslant 1$.

2-11 证明 Fourier 变换把S映到S中.

2-12 重复应用一维的 Parseval 等式来证明n维的 Parseval 等式.

2-13 验证等式(2-59)后面的 Taylor 展开式.

第三章　正则性(变系数)

3-1　形式次椭圆算子

我们想到的下一件事是：对于变系数方程是否也可以证明类似于上一章的定理．本章的目的是介绍一类变系数算子，它们具有类似于常系数次椭圆算子所具有的正则性性质．为此我们介绍一些术语．

我们将把

$$P(x, D)=\sum_{|\mu|\leqslant m} a_\mu(x) D^\mu \tag{3-1}$$

称为 Ω 中的形式次椭圆算子，如果它满足下列条件：

1．系数 $a_\mu(x)$ 属于 $C^\infty(\Omega)$；

2．对于 Ω 中每两点 y 和 z，多项式 $P(y, \xi)$ 弱于多项式 $P(z, \xi)$；

3．对于每一点 $y\in\Omega$ 常系数算子 $P(y, D)$ 是次椭圆的．

在第三条中，算子 $P(y, D)$ 是常系数算子，其系数是函数 a_μ 在点 y 处的值．我们将证明

定理 3-1　假定 $P(x, D)$ 在 Ω 中是形式次椭圆算子．若 $f\in C^\infty(\Omega)$，则

$$P(x, D)u=f \tag{3-2}$$

的每个弱解都属于 $C^\infty(\Omega)$，因此是一个解．

和前面一样，这个定理意味着：

$$(u, P'(x, D)\varphi)=(f, \varphi),\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{3-3}$$

蕴含 $u\in C^\infty(\Omega)$（这里 $P'(x, D)$ 是 $P(x, D)$ 的形式共轭；参看 1-3 节）．

我们将在 3-2 节中证明这个定理．这里我们要给出几个例子．

算子 $P(x, D)$ 称为在点 x 是椭圆型的，如果系数为 a_μ 在点 x 之值的常系数算子是椭圆型的．$P(x, D)$ 称为在区域 Ω 中是椭圆型的，如果它在 Ω 的每一点都有同样的阶数 m 而且都是椭圆型的．这等价于说

$$p(x, \xi) \neq 0,\ x \in \Omega,\ \xi \text{ 实的} \tag{3-4}$$

其中

$$p(x, D) = \sum_{|\mu|=m} a_\mu(x) D^\mu \tag{3-5}$$

我们有

引理 3-2 若 $P(x, D)$ 在 Ω 中是椭圆型的，并且其系数 $a_\mu(x)$ 都属于 $C^\infty(\Omega)$，则 $P(x, D)$ 在 Ω 中是形式次椭圆算子．

证明 由 2-4 节定理 2-7 知道，每个常系数椭圆算子一定是次椭圆算子(实际上，我们可以代数地验证这一点)．因此形式次椭圆条件中的 1 和 3 马上得到验证． 为验证 2，我们注意到任何阶数 $\leqslant m$ 的算子都是弱于一个 m 阶椭圆算子的．因为我们在 2-4 节引理 2-8 的证明中证明了存在常数 K，使得

$$(1+|\xi|)^{2m} \leqslant K^2(|P(\xi)|^2 + (1+|\xi|)^{2m-2}) \tag{3-6}$$

若 $1+|\xi| > 2^{1/2}K$，我们有

$$K(1+|\xi|)^{m-1} < \frac{(1+|\xi|)^m}{\sqrt{2}}$$

因此

$$(1+|\xi|)^m \leqslant 2^{1/2}K|P(\xi)| \tag{3-7}$$

再则，存在常数 K'，使得

$$(1+|\xi|)^m \leqslant K' \sum |P^{(\mu)}(\xi)|,\ 1+|\xi| \leqslant 2^{1/2}K \tag{3-8}$$

因为，对于实的 ξ，上式右端不为零．把不等式(3-7)和(3-8)结合起来，我们得到

$$(1+|\xi|)^m \leqslant K'' \sum |P^{(\mu)}(\xi)|,\ \xi \text{ 实的} \tag{3-9}$$

若 $Q(\xi)$ 是任何次数 $\leqslant m$ 的多项式，则存在常数 K'''，使得

$$|Q(\xi)| \leqslant K'''(1+|\xi|)^m \tag{3-10}$$

不等式(3-9)和(3-10)证明了我们的断言．

定理 3-1 是属于 Hörmander (1958) 和 Malgrange (1957) 的．

3-2 正则性的证明

设 $P(D)$ 是一常系数算子而 Ω 是一有界区域. 考虑表达式

$$|w|_s^P = |P(D)w|_s, \quad w\in C_0^\infty(\Omega) \tag{3-11}$$

我们注意到这是 $C_0^\infty(\Omega)$ 上的一个范数, 即它满足 1-5 节中的 (1-58) 到 (1-60). 其中只有一条——即 (3-11) 满足 (1-59)——不是非常显然的. 这一点可以从 2-7 节的定理 2-12 和多项式 $Q(\xi)\equiv 1$ 弱于 $P(\xi)$ 这一事实推得. 因此, 若 $|w|_s^P=0$, 由此推出 $|w|_s=0$, 从而 $w=0$. 设 $H_P^s(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 关于范数 (3-11) 的完备化. 则 $H_P^s(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间(其内积应该是相当明显的).

现在, 假定 $u\in H_P^s(\Omega)$, 又设 $Q(\xi)$ 是任何弱于 $P(\xi)$ 的多项式. 于是我们可以把 $Q(D)u$ 定义为 H^s 中的一个元素. 因为由 2-7 节的定理 2-12

$$|Q(D)w|_s\leqslant C|w|_s^P, \quad w\in C_0^\infty(\Omega) \tag{3-12}$$

但若 $u\in H_P^s(\Omega)$, 则存在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的一个函数序列 $\{w_k\}$ 在 $H_P^s(\Omega)$ 中收敛到 u. 因此, 由不等式 (3-12), $\{Q(D)w_k\}$ 是 H^s 中的一个 Cauchy 序列. 因此, 存在 $h\in H^s$ 使得在 H^s 中 $Q(D)w_k\to h$. 注意到 h 并不依赖于所选的特定序列 $\{w_k\}$, 只要在 $H_P^s(\Omega)$ 中 $w_k\to u$ 就行了. 我们就把 $Q(D)u$ 定义为 h. 把 (3-12) 用到 w_k 上去并且取极限, 我们得到

$$|Q(D)u|_s\leqslant C|u|_s^P, \quad u\in H_P^s(\Omega) \tag{3-13}$$

注意到

$$(u, \bar{Q}(D)v) = (Q(D)u, v), \quad u\in H_P^s(\Omega), \quad v\in S \tag{3-14}$$

现在让我们回到

定理 3-1 的证明 假定 $P(x, D)$ 是 Ω 中的形式次椭圆算子. 设 y 是 Ω 中任一固定点, 又令

$$P(D) = P(y, D) \tag{3-15}$$

设 $a>0$ 是一使 $P(D)$ 满足 2-6 节中的不等式 (2-72) 的常数. 令 $b=a/m$, 其中 m 是 $P(D)$ 的阶数. 我们将证明

定理3-3 对于每个实数 s, 存在 y 的一个邻域 N_y, 使得每当 u, f 满足等式 (3-3), 且对于所有的 $\varphi\in C_0^\infty(N_y)$, $\varphi f\in H^s(\Omega)$ 和 $\varphi u\in H_P^{s-b}(\Omega)$ 时,

$$|J_\varepsilon(\varphi u)|_s^P\leqslant C(|\varphi f|_s+\sum_{|\mu|\leqslant m}|uD^\mu\varphi|_{s-b}^P),\quad \varphi\in C_0^\infty(N_y)\tag{3-16}$$

常数 C 不依赖于 ε, φ, f 和 u.

在着手证明定理3-3之前, 我们先来说明一下怎样从定理3-3推出定理3-1. 假定 $f\in C^\infty(\Omega)$, $u\in L^2(\Omega)$ 且等式(3-3)成立. 则对于每个 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi f\in C_0^\infty(\Omega)$. 于是设 y 是 Ω 的任何一点, 且假定存在一个 s 和一个 y 的邻域 Ω_1, 使得对于每个 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_1)$, $\varphi u\in H_P^{s-b}(\Omega)$. 由 (3-16) 知存在邻域 $N_y\subseteq\Omega_1$, 使得对于每个 $\varphi\in C_0^\infty(N_y)$, 有

$$|J_\varepsilon(\varphi u)|_s^P\leqslant\text{常数}\tag{3-17}$$

由不等式(3-17)和 Banach-Saks 定理 (1-5 节的定理1-9) 知存在一序列 $\varepsilon_k\to 0$, 使得

$$\frac{[J_{\varepsilon_1}(\varphi u)+\cdots+J_{\varepsilon_k}(\varphi u)]}{k}$$

在 $H_P^s(\Omega)$ 中收敛. 因为这个序列在 H^s 中收敛到 φu(参看 2-5 节 (2-64)), 在 $H_P^s(\Omega)$ 中它也同样收敛到 φu. 这就证明了 $\varphi u\in H_P^s(\Omega)$. 因此我们已经证明了, 若存在 y 的一个邻域 Ω_1 使得对于每个 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_1)$, $\varphi u\in H_P^{s-b}(\Omega)$, 则存在一个邻域 $N_y\subseteq\Omega_1$ 使得对于每个 $\varphi\in C_0^\infty(N_y)$, 有 $\varphi u\in H_P^s(\Omega)$. 若我们能找到一个 t 使得对于一切 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 有 $\varphi u\in H_P^t(\Omega)$, 则通过一个归纳法的论证将可推出对于每个 s 存在邻域 N_y 使得对于所有的 $\varphi\in C_0^\infty(N_y)$, 有 $\varphi u\in H_P^s(\Omega)$. 应用 2-3 节引理 2-5, 就可证明对每个 k, 存在 y 的一个邻域 N_y, 使得 $u\in C^k(N_y)$. 因为 y 是 Ω 的任意点, 这就意味着 $u\in C^\infty(\Omega)$.

因此, 为了完成证明, 只要找到一个 t, 使得 $\varphi u\in H_P^t(\Omega)$ 就够了. 这是容易做到的. 我们可以取 $t=-m$. 因为, 根据不等式 (2-30), 存在常数 C, 使得

$$|P(D)w|_{-m}\leqslant C|w|_0,\ w\in C_0^\infty(\Omega) \tag{3-18}$$

现在我们知道在 $C^\infty(\Omega)$ 中存在一个函数序列 $\{w_k\}$，它在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到 u(2-2 节定理 2-3). 由 (3-18), 对每个 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\{\varphi w_k\}$ 是 $H_P^{-m}(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 序列. 因此,对于每个这样的 φ, $\varphi u\in H_P^{-m}(\Omega)$. 这就完成了证明.

现在我们回过头来证明定理 3-3. 根据假设 $P(D)$ 是次椭圆的. 设 V 是由所有弱于 $P(\xi)$ 的多项式构成的集合. 显然 V 是一个向量空间 (如果不熟悉这个术语, 参看 3-3 节). 因为, 如果 $Q_1(\xi)$ 和 $Q_2(\xi)$ 都属于 V, 所以对于任何纯量 α_1, α_2, $\alpha_1Q_1(\xi)+\alpha_2Q_2(\xi)$ 也属于 V. 而且, V 是有限维的. 为证明这一点, 注意到 V 是所有次数$\leqslant m$ 的多项式构成的向量空间的子空间. 因为次数 $>m$ 的多项式不可能弱于一个 m 次多项式,由这一事实就可得出以上结论. 进一步, $|\mu|\leqslant m$ 的单项式 ξ^μ 是线性无关的, 而每一个次数$\leqslant m$ 的多项式是这种单项式的线性组合. 因此 V 是有限维的. (本节所有的命题都将在下一节中得到证明.)

设 $P_1(\xi),\cdots,P_N(\xi)$ 是 V 的一组基. 根据 3-1 节的假设 2, 3, 对于每个 $x\in\Omega$, 多项式 $P(x,\ \xi)$ 属于 V. 因此,我们能写下

$$P(x,\ \xi)=\sum_{j=1}^N c_j(x)P_j(\xi),\ \ x\in\Omega \tag{3-19}$$

我们将证明系数 $c_j(x)$ 属于 $C^\infty(\Omega)$. 我们把这一事实的证明推迟到本节末. 暂时假定它是对的.

因为

$$P(D)=P(y,\ D)=\sum_{j=1}^N c_j(y)P_j(D) \tag{3-20}$$

由等式(3-19), (3-20),我们有

$$P(x,\ D)-P(D)=\sum_{j=1}^N b_j(x)P_j(D) \tag{3-21}$$

其中 $b_j(x)=c_j(x)-c_j(y)$. 由此

$$b_j(y)=0,\ 1\leqslant j\leqslant N \tag{3-22}$$

由等式(3-21),我们有

$$P'(x,\ D)-\bar{P}(D)=\sum_{j=1}^N \bar{P}_j(D)\bar{b}_j(x) \tag{3-23}$$

为了实现定理 3-3 之证明，我们将需要下列几个引理：

引理 3-4 若 $\psi\in C_0^\infty(E^n)$ 而 $v\in H^s$，则 $\psi v\in H^s$，并且存在只依赖于 ψ 和 s 的常数 C，使得

$$|\psi v|_s\leqslant\max_{E^n}|\psi(x)||v|_s+C|v|_{s-1},\quad v\in H^s \tag{3-24}$$

$$|J_s(\psi v)-\psi J_s v|_s\leqslant C|v|_{s-1},\quad v\in H^{s-1} \tag{3-25}$$

引理 3-5 设 $P(D)$ 是一个 m 阶次椭圆算子，它满足 2-6 节中常数为 $a>0$ 的不等式(2-72)．令 $b=a/m$，又设 $Q(\xi)$ 是一个弱于 $P(\xi)$ 的多项式．则对于每个实数 s 和每个有界区域 Ω

$$\sum_{|\mu|>0}|Q^{(\mu)}(D)\varphi|_{s+b}\leqslant C(|P(D)\varphi|_s+|\varphi|_s),\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{3-26}$$

我们将在 3-4 节中证明这些引理．现在先假定它们是对的，我们给出定理 3-3 的证明．

因为 $P_j(\xi)$ 都弱于 $P(\xi)$，所以存在常数 C_0，使得

$$|P_j(D)w|_s\leqslant C_0|P(D)w|_s,\ w\in H_P^s(\Omega) \tag{3-27}$$

由等式(3-22)，存在一个中心在 y 的球 Ω_1，使得

$$\sum_{j=1}^N|b_j(x)|\leqslant\frac{1}{2C_0},\ \ x\in\Omega_1 \tag{3-28}$$

设 N_y 是一个球心在 y，半径比 Ω_1 的半径小的球．那么在 $C_0^\infty(\Omega_1)$ 中存在一个 ψ，使得

$$0\leqslant\psi(x)\leqslant 1,\ \ x\in\Omega_1 \tag{3-29}$$

$$\psi(x)=1,\ \ x\in N_y \tag{3-30}$$

(参看 1-3 节)．显然对于 $\varphi\in C_0^\infty(N_y)$，有 $\psi\varphi=\varphi$．于是对于 $\varphi\in C_0^\infty(N_y)$，$v\in S$，我们有

$$\begin{aligned}
&(u,\ \overline{\varphi}\overline{P}(D)J_s v)\\
&=(u,\ \overline{P}(D)(\overline{\varphi}\psi J_s v))-\sum_{|\mu|>0}\frac{(u,\ D^\mu\overline{\varphi}\overline{P}^{(\mu)}(D)(\psi J_s v))}{\mu}\\
&=(f,\ \overline{\varphi}J_s v)-\sum_{j=1}^N(u,\ \varphi\overline{P}_j(D)(\overline{b}_j\psi J_s v))\\
&\quad-\sum_{j=0}^N\sum_{|\mu|>0}\frac{(uD^\mu\varphi,\ \overline{P}_j^{(\mu)}(D)(\overline{b}_j\psi J_s v))}{\mu}
\end{aligned}$$

这里我们已经用到了 1-7 节的恒等式(1-102)和等式(3-23)，并

且令 $P_0(\xi)=P(\xi)$, $b_0(\xi)\equiv 1$. 令 $\psi_j=\psi b_j$. 因为假定了 u 属于 H_P^{s-b}, $P_j(D)(\varphi u)\in H^{s-b}$, 因为

$$
\begin{aligned}
(P(D)J_s(\varphi u),v)=(J_s(\varphi f),v)& \\
&-\sum_{j=1}^{N}(J_s[\psi_j P_j(D)(\varphi u)],v) \\
&-\sum_{j=0}^{N}\sum_{|\mu|>0}\frac{(J_s[\psi_j P_j^{(\mu)}(D)(uD^\mu\varphi)],v)}{\mu!}
\end{aligned}
$$

因为对所有的 $v\in S$ 这都对, 所以根据 2-3 节的等式(2-29), 我们有

$$
\begin{aligned}
|P(D)J_s(\varphi u)|_s\leqslant|J_s(\varphi f)|_s& \\
&+\sum_{j=1}^{N}|J_s[\psi_j P_j(D)(\varphi u)]|_s \\
&+\sum_{j=0}^{N}\sum_{|\mu|>0}\frac{|J_s[\psi_j P_j^{(\mu)}(D)(uD^\mu\varphi)]|_s}{\mu!}
\end{aligned}
$$

根据不等式(3-25), (3-24)和(3-27), 对于 $1\leqslant j\leqslant N$

$$
\begin{aligned}
&|J_s[\psi_j P_j(D)(\varphi u)]|_s \\
&\quad\leqslant|\psi_j J_s[P_j(D)(\varphi u)]|_s+C|P_j(D)(\varphi u)|_{s-1} \\
&\quad\leqslant\max_{\Omega_1}|\psi_j|\,|P_j(D)J_s(\varphi u)|_s+C_1|P_j(D)(\varphi u)|_{s-a} \\
&\quad\leqslant C_0\max_{\Omega_1}|\psi_j|\,|P(D)J_s(\varphi u)|_s+C_2|P(D)(\varphi u)|_{s-a}
\end{aligned}
$$

(显然我们总可以取 $a\leqslant 1$. 实际上, 我们不可能取 $a>1$.) 应用一下引理 3-4 和 3-5 就给出, 对于 $|\mu|>0$ 和 $0\leqslant j\leqslant N$

$$
\begin{aligned}
&|J_s[\psi_j P_j^{(\mu)}(D)(uD^\mu\varphi)]|_s \\
&\quad\leqslant|\psi_j J_s P_j^{(\mu)}(D)(uD^\mu\varphi)|_s+C_3|P_j^{(\mu)}(D)(uD^\mu\varphi)|_{s-1} \\
&\quad\leqslant C_4|P(D)(uD^\mu\varphi)|_{s-b}
\end{aligned}
$$

现在, 由不等式(3-28)和(3-29)

$$
\sum_{j=1}^{N}|\psi_j(x)|\leqslant\frac{1}{2C_0},\quad x\in E^n
$$

因此我们有

$$
\begin{aligned}
|P(D)J_s(\varphi u)|_s\leqslant|J_s(\varphi f)|_s+\frac{1}{2}|P(D)J_s(\varphi u)|_s& \\
&+(N+1)(C_2+C_4)\sum_{|\mu|\leqslant m}|P(D)(uD^\mu\varphi)|_{s-b}
\end{aligned}
$$

从两边减去 $\frac{1}{2}|P(D)J_s(\varphi u)|_s$, 我们得到

$$|J_s(\varphi u)|_s^P \leqslant 2|J_s(\varphi f)|_s + C_5 \sum_{|\mu|\leqslant m} |uD^\mu \varphi|_{s-b}^P \tag{3-31}$$

这就蕴含着不等式(3-16).

剩下要证明等式(3-20)中的函数 $c_j(x)$ 属于 $C^\infty(\Omega)$. 为证明这点,首先注意到

引理 3-6 设 $P_1(\xi), \cdots, P_N(\xi)$ 是线性无关的多项式. 则存在实向量 $\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(N)}$, 使得行列式

$$|P_j(\xi^{(k)})|, \ 1\leqslant j, \ k\leqslant N \tag{3-32}$$

不等于零.

暂时假定这个引理是对的. 那么根据等式(3-19),我们有

$$P(x, \xi^{(k)}) = \sum_{j=1}^{N} c_j(x) P_j(\xi^{(k)}), \ 1\leqslant k\leqslant N \tag{3-33}$$

用 Kramer 法则解这 N 个方程. 这就给出

$$c_j(x) = \sum_{k=1}^{N} \beta_{jk} P(x, \xi^{(k)}), \ 1\leqslant j\leqslant N \tag{3-34}$$

其中 β_{jk} 是(3-32)中 $P_j(\xi^k)$ 的余子式除以行列式(3-32). 这就证明了函数 $c_j(x)$ 和 $P(x, \xi)$ 的系数一样光滑.

剩下要做的就是给出

引理 3-6 的证明 假定我们选不到使(3-32)不等于零的 $\xi^{(k)}$. 设 $l\leqslant N$ 是使行列式

$$|P_j(\xi^{(k)})|, \ 1\leqslant j, \ k\leqslant l \tag{3-35}$$

对任意选择的 $\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(l)}$ 都等于零的最小整数. 于是,存在向量 $\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(l-1)}$, 使得行列式

$$|P_j(\xi^{(k)})| \neq 0, \ 1\leqslant j, \ k< l \tag{3-36}$$

而

$$\begin{vmatrix} P_1(\xi^{(1)}), & \cdots P_1(\xi^{(l-1)}), & P_1(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_l(\xi^{(1)}), & \cdots P_l(\xi^{(l-1)}), & P_l(\xi) \end{vmatrix} \tag{3-37}$$

对 ξ 恒等于零. 展开(3-37),我们得到

$$\sum_{j=1}^{l} \gamma_j P_j(\xi) \equiv 0$$

由(3-36)我们知道$\gamma_l \neq 0$. 这就意味着$P_j(\xi)$是线性相关的，与假设矛盾. 因此这样的整数是不存在的. 这就完成了证明.

3-3 向量空间

一个向量空间是元素u, v, w, $\cdots$的集合，它满足1-5节的(1-45)到(1-50)和(1-56). 但不假定它有Hilbert空间的其它性质.

设V是一个向量空间. 元素v_1, $\cdots$, v_n叫做**线性无关的**，如果满足

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \tag{3-38}$$

的纯量α_1, $\cdots$, α_n只能是$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. 否则$v_k$就叫做**线性相关的**. 如果

1. 存在V中n个线性无关的元素，
2. V的任何$n+1$个元素都是线性相关的，

则空间V叫做是维数为$n \geqslant 0$的空间($\dim V = n$).(当V中没有线性无关向量时，即当V只包含一个0向量时，我们取$n=0$.)如果不存在满足1和2的有限的n，则我们说V是无限维的. 现设V是n维的，又设v_1, $\cdots$, v_n是任何一组n个线性无关的元素. 那么，每个$v \in V$可以唯一地表为以下形式

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \tag{3-39}$$

为证明这点，注意到v, v_1, $\cdots$, v_n是线性相关的. 因此存在不全为零的纯量β, β_1, $\cdots$, β_n，使得

$$\beta v + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n = 0$$

而且，β不能为零，因为若β为零，则v_k就是线性相关的了. 用β除两端就得到(3-39)式. 注意α_k是唯一的. 因为如果

$$v = \alpha_1' v_1 + \cdots + \alpha_n' v_n$$

则
$$(\alpha_1 - \alpha_1') v_1 + \cdots + (\alpha_n - \alpha_n') v_n = 0$$

这表明对每个k, $\alpha_k' = \alpha_k$. 在一个n维向量空间中，任何n个线性无关的向量构成的集合叫做V的一组基.

引理 3-7 若 V 是一个包含线性无关元素 $v_1, \cdots, v_n$ 的向量空间，使每个 $v\in V$ 可表为(3-39)的形式，则 $\dim V=n$.

证明 我们需要证明的只是：每组 $n+1$ 个元素都是线性相关的. 设 $u_1, \cdots, u_{n+1}$ 是 V 中任何 $n+1$ 个元素，则存在纯量 α_{jk} 使得

$$u_j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}u_k, \quad 1\leqslant j\leqslant n+1 \tag{3-40}$$

由线性方程组的理论，我们可以求得不全为零的纯量 $\beta_1, \cdots, \beta_{n+1}$，使得

$$\sum_{j=1}^{n+1}\beta_j\alpha_{jk}=0, \quad 1\leqslant k\leqslant n \tag{3-41}$$

因为这是 $n+1$ 个未知数的 n 个方程的方程组. 因此

$$\sum_{j=1}^{n+1}\beta_j u_j=\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\beta_j\alpha_{jk}v_k=0$$

就说明 u_j 是线性相关的.

正如同在 Hilbert 空间的情形那样，如果当 u, v 属于 V 的子集合时对于所有的纯量 α, β 都有 $\alpha u+\beta v\in W$，则 V 的子集合 W 就叫做 V 的一个子空间. 注意向量空间的子空间本身是向量空间.

引理 3-8 如果 V 是一个向量空间并且 V 的每一组 n 个向量都是线性相关的，则 $\dim V<n$.

证明 设 k 是使 V 有 k 个线性无关向量的最大整数（如果不存在这样的 k，我们取 $k=0$）. 因为每 n 个或多于 n 个向量都是线性相关的，所以我们知道这样的整数是存在的. 而且 $k<n$. 因为每一组 $k+1$ 个向量都是线性相关的，所以显然有 $k=\dim V$. 这就完成了证明.

推论 3-9 若 W 是向量空间 V 的子空间，则 $\dim W\leqslant\dim V$.

证明 若 $\dim V=n$，而 $w_1, \cdots, w_{n+1}$ 是 W 中任何 $n+1$ 个向量，则它们一定线性相关. 因此 $\dim W\leqslant n$(引理 3-8).

引理 3-10 若 a_μ 是复常数，使得

$$\sum_{|\mu|\leqslant m}a_\mu\xi^\mu\equiv 0, \qquad \xi\text{ 为实的} \tag{3-42}$$

则所有的 a_μ 都等于零

证明 应用归纳法. 我们知道

$$\sum_{k=0}^{m} a_k t^k = 0,\quad t \text{ 为实的}$$

蕴含着 a_k 都等于零. 现在假定引理对 $n-1$ 已经证明. 恒等式 (3-42) 可写成形式

$$\sum_{k=0}^{m} Q_k(\xi')\xi_n^k = 0 \tag{3-43}$$

其中 $\xi' = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$ 而 Q_k 都是 ξ' 的多项式. 由此可见 $Q_k(\xi')$ 恒等于零. 根据归纳法假定, 它们的系数必等于零.

推论 3-11 单项式 ξ^μ 是线性无关的. 设 π_m 是次数 $\leqslant m$ 的多项式组成的集合. 因此 π_m 中的每个多项式 $P(\xi)$ 的形式为

$$P(\xi) = \sum_{|\mu| \leqslant m} a_\mu \xi^\mu \tag{3-44}$$

显然 π_m 是一个向量空间. 根据引理 3-7 和推论 3-11, 我们知道 π_m 是有限维的.

引理 3-12 设 $P(\xi)$ 是 m 次多项式而 $Q(\xi)$ 是弱于 $P(\xi)$ 的多项式. 则 $Q(\xi)$ 的次数 $\leqslant m$.

证明 假设
$$Q(\xi) = \sum_{|\mu| \leqslant k} b_\mu \xi^\mu$$
的次数 $k > m$, 则适合 $|\mu| = k$ 的 b_μ 不全为零. 因此

$$q(\xi) = \sum_{|\mu| = k} b_\mu \xi^\mu$$

不恒等于零(引理 3-10). 因此存在实向量 $\tilde{\xi}$, 使得 $q(\tilde{\xi}) \neq 0$. 若我们令 $Q_1(\xi) = Q(\xi) - q(\xi)$, 则对 $\lambda > 0$ 我们有

$$\begin{aligned}|Q(\lambda\tilde{\xi})| &\geqslant |q(\lambda\tilde{\xi})| - |Q_1(\lambda\tilde{\xi})| \\ &= \lambda^k |q(\tilde{\xi})| - |Q_1(\lambda\tilde{\xi})|\end{aligned}$$

设 $j \leqslant m$ 是多项式 $P^{(\mu)}(\lambda\tilde{\xi})$ 中对 λ 的最高次数, 则

$$M_\lambda = \frac{\sum |P^{(\mu)}(\lambda\tilde{\xi})|}{\lambda^j}$$

当 $\lambda \to \infty$ 时是有界的而且有正下界. 因此,

$$\frac{|Q(\lambda\tilde{\xi})|}{\lambda^{k-1}M_\lambda} \geqslant \frac{\lambda|q(\tilde{\xi})|}{M_\lambda} - \frac{|Q_1(\lambda\tilde{\xi})|}{\lambda^{k-1}M_\lambda} \to \infty,\ \text{当}\ \lambda \to \infty\ \text{时}$$

因为 $j < k$, 这就证明了 $Q(\xi)$ 不弱于 $P(\xi)$. 这就完成了证明.

推论 3-13 对于给定的多项式 $P(\xi)$，所有弱于 $P(\xi)$ 的多项式组成的集合是一个有限维向量空间.

3-4 引理的证明

现在我们来证明不等式 (3-24)—(3-26). 为了证明(3-24)，我们将利用一些简单的不等式.

设 s 是任意实数，则由中值定理.

$$t_1^s - t_2^s = s t_3^{s-1}(t_1 - t_2) \tag{3-45}$$

其中 t_3 是 t_1 和 t_2 间的某个值. 现在

$$1+|\xi| \leqslant (1+|\xi-\eta|)(1+|\eta|) \tag{3-46}$$

$$1+|\xi-\eta| \leqslant (1+|\xi|)(1+|\eta|) \tag{3-47}$$

从(3-46)推出，对于 $\sigma>0$

$$(1+|\xi|)^\sigma \leqslant (1+|\xi-\eta|)^\sigma (1+|\eta|)^\sigma$$

从(3-47)推出，对于 $\sigma<0$

$$(1+|\xi|)^\sigma \leqslant (1+|\xi-\eta|)^\sigma (1+|\eta|)^{-\sigma}$$

因此，一般有

$$(1+|\xi|)^\sigma \leqslant (1+|\xi-\eta|)^\sigma (1+|\eta|)^{|\sigma|} \tag{3-48}$$

在等式(3-45)中令 $t_1=(1+|\xi|)$，$t_2=(1+|\xi-\eta|)$. 那么，我们有

$$\begin{aligned}
&|(1+|\xi|)^s-(1+|\xi-\eta|)^s| \\
&\quad \leqslant |s|\,||\xi|-|\xi-\eta||\cdot\max[(1+|\xi|)^{s-1},\ (1+|\xi-\eta|)^{s-1}] \\
&\quad \leqslant |s|\,|\eta|(1+|\eta|)^{|s-1|}(1+|\xi-\eta|)^{s-1}
\end{aligned} \tag{3-49}$$

我们现在就来证明 (3-24). 显然只要对 $v\in S$ 证明 (3-24) 就够了. 由 2-5 节的定理 2-10

$$(2\pi)^n F(\psi v) = \int F\psi(\eta) F v(\xi-\eta)\, d\eta$$

因此，由(3-49)

$$(2\pi)^n(1+|\xi|)^s|F(\psi v)|$$
$$=(1+|\xi|)^s\left|\int F\psi(\eta)Fv(\xi-\eta)d\eta\right|$$
$$\leqslant\left|\int(1+|\xi-\eta|)^sF\psi(\eta)Fv(\xi-\eta)\,d\eta\right|$$
$$+|s|\int|\eta|(1+|\eta|)^{|s-1|}(1+|\xi-\eta|)^{s-1}|F\psi(\eta)Fv(\xi-\eta)|d\eta \tag{3-50}$$

令
$$w(x)=G[(1+|\xi|)^sFv(\xi)]$$
其中 G 是逆 Fourier 变换(见 2-5 节)．

则
$$\int(1+|\xi-\eta|)^sF\psi(\eta)Fv(\xi-\eta)d\eta=(2\pi)^nF(\psi w) \tag{3-51}$$
若$\|\ \|'$表示关于变量 ξ 的通常的 $L^2(E^n)$ 范数,则
$$(2\pi)^{n/2}\|w\|=\|Fw\|'=|v|_s \tag{3-52}$$
由此
$$\|F(\psi w)\|'=(2\pi)^{n/2}\|\psi w\|$$
$$\leqslant\max_x|\psi(x)|(2\pi)^{n/2}\|w\|=\max_x|\psi(x)||v|_s \tag{3-53}$$
由(3-50)和(3-51)
$$(2\pi)^n\|(1+|\xi|)^sF(\psi v)\|'\leqslant(2\pi)^n\|F(\psi w)\|'$$
$$+|s|\int|\eta|(1+|\eta|)^{|s-1|}|F\psi(\eta)|$$
$$\times\|(1+|\xi-\eta|)^{s-1}Fv(\xi-\eta)\|'d\eta$$
因此由(3-52)和(3-53)
$$|\psi v|_s\leqslant\max_x|\psi(x)||v|_s$$
$$+(2\pi)^{-n}|s||v|_s\int|\eta|(1+|\eta|)^{|s-1|}|F\psi(\eta)|d\eta \tag{3-54}$$

这就给出了(3-24)．

为证明 (3-25)，我们指出根据等式 (2-62) 和 2-5 节的定理 2-10

$$F[J_\varepsilon(\psi v)-\psi J_\varepsilon v]$$
$$=\int F\psi(\eta)Fv(\xi-\eta)[Fj(\varepsilon\xi)-Fj(\varepsilon\xi-\varepsilon\eta)]d\eta$$
我们将证明存在常数 C, 使得
$$|(1+|\xi|)[Fj(\varepsilon\xi)-Fj(\varepsilon\eta-\varepsilon\xi)]|\leqslant C(1+|\eta|) \quad (3\text{-}55)$$
先假定(3-55)是对的,那么由(3-48)得到
$$\|(1+|\xi|)^s F[J_s(\psi v)-\psi J_s v]\|'$$
$$\leqslant C\int(1+|\eta|)^{|s-1|+1}|F\psi(\eta)|\,\|(1+|\xi-\eta|)^{s-1}Fv(\xi-\eta)\|'d\eta$$
$$\leqslant C|v|_{s-1}\int(1+|\eta|)^{|s-1|+1}|F\psi(\eta)|d\eta$$
这就给出了 (3-25). 为了证明 (3-55), 我们注意到对所有的 ξ, $|Fj(\xi)|\leqslant 1$, 并且
$$\varepsilon\xi_k[Fj(\varepsilon\xi)-Fj(\varepsilon\xi-\varepsilon\eta)]$$
$$=-\int(D_k e^{-i\varepsilon(\xi,x)}(1-e^{i\varepsilon(\eta,x)})j(x)dx$$
$$=\int e^{-i\varepsilon(\xi,x)}[-\varepsilon\eta_k j(x)+(1-e^{i\varepsilon(\eta,x)})D_k j(x)]dx$$
因为
$$|1-e^{i\varepsilon(\eta,x)}|\leqslant\varepsilon|\eta|\,|x|$$
(见 2-5 节不等式(2-66)),我们有
$$|\xi_k[Fj(\varepsilon\xi)-Fj(\varepsilon\eta-\varepsilon\xi)]|\leqslant C|\eta|$$
又因为 $|\xi|\leqslant\sum|\xi_k|$, 就证明了(3-55).

为了证明(3-26),我们首先证明

引理 3-14 设 $r=r(m,n)$ 表示模 $|\mu|\leqslant m$ 的一切多重指标 μ 的个数(即阶数 $\leqslant m$ 的不同的导数的个数). 设 $\theta_1,\cdots,\theta_r$ 是 E^n 中的使 $\det(\theta_j^\mu)\neq 0$ 的任意 r 个向量. 则对于模 $|\mu|\leqslant m$ 的每个多重指标 μ, 存在实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 使得对所有次数 $\leqslant m$ 的多项式 $Q(\xi)$, 所有的 $\xi\in E^n$, 和所有的实数 t
$$t^{|\mu|}Q^{(\mu)}(\xi)=\sum_{j=1}^r\lambda_j Q(\xi+t\theta_j) \quad (3\text{-}56)$$
成立.

注意到从引理 3-6 和推论 3-11 推得: 总存在向量 $\theta_j\in E^n$, 使

得 $\det(\theta_j^\mu)\neq 0$. 在证明引理 3-14 之前我们给出几个推论.

定理 3-15 若 $Q(\xi)$ 弱于 $P(\xi)$, 则存在常数 C 使得对所有的 $\xi\in E^n$ 和 $t\geqslant 1$

$$\sum_\mu t^{|\mu|}|Q^{(\mu)}(\xi)|\leqslant C\sum_\mu t^{(\mu)}|P^{|\mu|}(\xi)| \tag{3-57}$$

成立.

证明 假定 $P(\xi)$ 是 m 阶的. 设 $\theta_1, \cdots, \theta_r$ 是满足引理 3-14 的假设的 E^n 中的任意 $r(m, n)$ 个向量. 若 μ 是模 $|\mu|\leqslant m$ 的任意指标, 则我们可以求得 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 使得等式(3-56)成立. 因此

$$\begin{aligned} t^{|\mu|}|Q^{(\mu)}(\xi)| &\leqslant \sum|\lambda_j|\,|Q(\xi+t\theta_j)| \\ &\leqslant C\sum_{\nu,j}|P^{(\nu)}(\xi+t\theta_j)| \end{aligned} \tag{3-58}$$

于是, 由 Taylor 公式

$$P^{(\nu)}(\xi+t\theta_j)=\sum_\rho \frac{P^{(\nu+\rho)}(\xi)t^{|\rho|}\theta_j^\rho}{\rho!}$$

因此

$$\begin{aligned} |P^{(\nu)}(\xi+t\theta_j)| &\leqslant \sum_\rho t^{|\rho|}|P^{(\nu+\rho)}(\xi)| \\ &\leqslant \sum_\tau t^{|\sigma|}|P^{(\sigma)}(\xi)| \end{aligned} \tag{3-59}$$

这里我们利用了 $t\geqslant 1$ 这个事实. 把不等式 (3-58) 和 (3-59) 结合起来, 我们得到不等式(3-57).

另一个推论是

定理 3-16 若 $Q(\xi)$ 弱于 $P(\xi)$, 则存在常数 C 使得对所有的实数 s, $c>0$ 和 $v\in S$, 有

$$\sum_\mu|Q^{(\mu)}(D)v|_{s+c|\mu|}\leqslant C\sum_\mu|P^{(\mu)}(D)v|_{s+c|\mu|} \tag{3-60}$$

证明 由定理 3-15 知存在常数 C_1, 使得对所有的 $\xi\in E^n$ 和 $t\geqslant 1$ 有

$$\sum_\mu t^{2|\mu|}|Q^{(\mu)}(\xi)|^2\leqslant C_1\sum_\mu t^{2|\mu|}|P^{(\mu)}(\xi)|^2 \tag{3-61}$$

在上式中取 $t=(1+|\xi|)^c$, 乘以 $(1+|\xi|)^{2s}|Fv|^2$, 并在 E^n 上关于 ξ 积分. 这就给出了一个与(3-60)等价的不等式.

引理 3-5 的证明　显然对于 $|\mu|\leqslant m$ 有 $b|\mu|\leqslant a$. 由此，由 2-8 节的不等式(2-84)

$$\sum_{|\mu|>0}|P^{(\mu)}(D)\varphi|_{s+b|\mu|}\leqslant\|\varphi\|_{s+a}$$

$$\leqslant C(|P(D)\varphi|_s+|\varphi|_s),\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

因此由(3-60)

$$\sum_{\mu}|Q^{(\mu)}(D)\varphi|_{s+b|\mu|}\leqslant C_1(|P(D)\varphi|_s+|\varphi|_s)\tag{3-62}$$

这是(3-26)的一种更强的形式. 剩下只要给出

引理 3-14 的证明　由 Taylor 公式我们有

$$Q(\xi+t\theta_j)=\sum\frac{Q^{(\mu)}(\xi)t^{|\mu|}\theta_j^\mu}{\mu!}$$

因此,对任何 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$

$$\sum_{j=1}^r\lambda_jQ(\xi+t\theta_j)=\sum_{\mu}\left(\sum_{j=1}^r\lambda_j\theta_j^\mu\right)\frac{t^{|\mu|}Q^{(\mu)}(\xi)}{\mu!}\tag{3-63}$$

因为矩阵(θ_j^μ)是非奇异的，对于任意使 $|\nu|\leqslant m$ 的多重指标 ν, 我们可以对 λ_j 解方程组

$$\sum_{j=1}^r\lambda_j\theta_j^\mu=\delta_{\mu\nu}\nu!,\quad |\mu|\leqslant m\tag{3-64}$$

其中当 $\mu\neq\nu$ 时 $\delta_{\mu\nu}=0$ 而 $\delta_{\nu\nu}=1$. 注意，它的解不依赖于 Q, t 或 ξ. 把(3-64)的解代入等式(3-63),我们得到等式(3-56). 这就完成了证明.

现在我们能够来证明 2-7 节的不等式(2-78)了. 我们只要在等式(3-56)中取 $t=1$ 和 $Q(\xi)=P(\xi)$就行了. 因此，对每个 μ 我们有

$$|P^{(\mu)}(\xi)|\leqslant\max|\lambda_j|\sum_{j=1}^r|P(\xi+\theta_j)|$$

如果现在我们对所有的 μ 求和,我们就得到所要的不等式.

3-5　存　在　性

还遗漏了一些事. 这就是：我已经证明了只要方程的右端属

于 $C^\infty(\Omega)$，那么形式次椭圆型方程的任何弱解都属于 $C^\infty(\Omega)$. 但是我们还没有首先证明这样一种方程是否有弱解. 为了弥补这个漏洞，我们将证明

定理 3-17 设 $P(x, D)$ 是区域 Ω 中的一个形式次椭圆算子. 则对于每个 $y\in\Omega$ 存在一个邻域 N_y，使得对于每个 $f\in L^2(N_y)$

$$P(x, D)u=f \tag{3-65}$$

在 N_y 中有一个弱解.

注意我们并没有断言在整个区域 Ω 中方程 (3-65) 有一个弱解.

证明 由 1-6 节的定理 1-12 只要求得 y 的一个邻域 N_y，使得

$$\|\varphi\|\leqslant C\|P'(x, D)\varphi\|,\ \ \varphi\in C_0^\infty(N_y) \tag{3-66}$$

就够了.

我们可以假定 Ω 是有界的. 由等式(3-23)

$$P'(x, D)\varphi=\overline{P}(D)\varphi+\sum_{j=1}^{N}\overline{P}_j(D)(\overline{b}_j\varphi) \tag{3-67}$$

而且，因为 $P_j(\xi)$ 是弱于 $P(\xi)$ 的，所以存在常数 C_0，使得

$$\|P_j(D)\varphi\|\leqslant C_0\|P(D)\varphi\|,\ \ \varphi\in C_0^\infty(\Omega),\ \ 1\leqslant j\leqslant N \tag{3-68}$$

由等式(3-22)，存在 y 的一个形为

$$|x_k-y_k|<\delta,\ 1\leqslant k\leqslant n$$

邻域 N_y，使得

$$\sum_{j=1}^{N}|b_j(x)|<\frac{1}{3C_0},\ \ x\in N_y \tag{3-69}$$

由等式(3-67)，我们有

$$\begin{aligned}\|P'(x, D)\varphi\|&\geqslant\|\overline{P}(D)\varphi\|-\sum_{j=1}^{N}\|\overline{P}_j(D)(\overline{b}_j\varphi)\|\\&\geqslant\|P(D)\varphi\|-C_0\sum_{j=1}^{N}\|P(D)(\overline{b}_j\varphi)\|\end{aligned}$$

这里我们已经用了 1-7 节的等式(1-104)和不等式(3-68). 因此，若 $\varphi\in C_0^\infty(N_y)$，我们有

$$
\begin{aligned}
\|P'(x, D)\varphi\| &\geqslant \|P(D)\varphi\| - C_0 \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\mu|\leqslant m} \|(D^\mu \bar{b}_j) P^{(\mu)}(D)\varphi\| \\
&\geqslant \|P(D)\varphi\| - C_0 \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\mu|\leqslant m} \operatorname{lub}_{N_y} |D^\mu \bar{b}_j| \, \|P^{(\mu)}(D)\varphi\| \\
&\geqslant \|P(D)\varphi\| - C_0 \operatorname{lub}_{N_y} \sum_{j=1}^{N} |b_j| \, \|P(D)\varphi\| \\
&\quad - C_0 \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\mu|>0} \operatorname{lub}_{\Omega} |D^\mu \bar{b}_j| \, \|P^{(\mu)}(D)\varphi\| \\
&\geqslant \frac{2}{3}\|P(D)\varphi\| - K\delta \|P(D)\varphi\|
\end{aligned}
$$

这里我们已经用了 1–7 节的引理 1–15 和 (3–69). 现在取 $\delta < 1/3K$. 这就给出

$$\|P(D)\varphi\| \leqslant 3\|P'(x, D)\varphi\|, \quad \varphi \in C_0^\infty(N_y) \tag{3-70}$$

因为 $P(D)$ 是常系数算子, 1–7 节的定理 1–13 断言存在常数 C, 使得

$$\|\varphi\| \leqslant C\|P(D)\varphi\|, \quad \varphi \in C_0^\infty(N_y) \tag{3-71}$$

结合不等式(3–70)和 (3–71) 我们就得到 (3–66). 这就完成了证明.

3–6 例

考虑几个算子的特例现在是时候了. 先考虑常系数算子. 一些众所周知的算子是:

1. Laplace 算子, $\sum_{k=1}^{n} D_k^2$. 这显然是椭圆的.

2. 热算子, $D_1 - i\sum_{k=2}^{n} D_k^2$. 容易验证这个算子是次椭圆的.

3. 波算子, $D_1^2 - \sum_{k=2}^{n} D_k^2$. 因为无论 $|\xi|$ 多大, 它的相应多项式总有实根, 所以它不是次椭圆算子.

为帮助我们识别其它的算子, 我们可以利用

定理 3–18 若 $P_1(\xi)$ 和 $P_2(\xi)$ 都是次椭圆的, 则 $P = P_1P_2$ 也是次椭圆的.

证明 因为 $P^{(j)}=P_1^{(j)}P_2+P_1P_2^{(j)}$，我们有

$$\left|\frac{P^{(j)}(\xi)}{P(\xi)}\right|\leqslant\left|\frac{P_1^{(j)}(\xi)}{P_1(\xi)}\right|+\left|\frac{P_2^{(j)}(\xi)}{P_2(\xi)}\right|\to 0,$$

$$\text{当 } \xi\to\infty,\ 1\leqslant j\leqslant n \text{ 时}$$

因此，P 是次椭圆的.

从这个定理我们就知道形为

$$\left(\sum_{k=1}^{n}D_k^2\right)^r\left(D_1\pm i\sum_{k=2}^{n}D_k^2\right)^s\left(D_1\pm\sum_{k=2}^{n}D_k^4\right)^t\cdots$$

的算子乘积都是次椭圆算子.

习 题

3–1 证明在 $H_p^s(\Omega)$ 中 $w_k\to u$ 蕴含着在 H^s 中 $Q(D)w_k\to Q(D)$.

3–2 证明推论 3–13.

3–3 证明等式(3–45)和不等式(3–46)和(3–47).

3–4 证明热算子是次椭圆的.

3–5 决定 n 维空间中模 $|\mu|\leqslant m$ 的不同的多重指标 μ 的个数 $r(m,n)$ (提示：首先考虑满足 $|\mu|=m$ 的多重指标).

3–6 证明：总可找到不全为零的 $\beta_1,\cdots,\beta_{n+1}$ 使得等式(3–41)成立.

3–7 证明引理 3–10 证明中的第一个断言.

第四章 Cauchy 问题

4-1 问题的陈述

在前几章中我们研究了关于方程在区域 Ω 中

$$P(x, D)u=f \tag{4-1}$$

在什么情况下有解的问题. 如同我们在第一章一开始所看到的, 一般说, 方程(4-1)的解不是唯一的. 所以, 毫不足怪, 在大多数应用中都要对偏微分方程的求解加上一些进一步的限制. 这些附加的限制通常是以边界条件的形式出现的, 而方程和边界条件一起就叫做一个边值问题.

最古老而又较重要的边值问题之一因 Cauchy 而得名. 为了对方程(4-1)来描述这个问题, 我们必须从诸坐标轴中区分出一个来. 为了最容易地做到这一点, 让我们在 E^{n+1} 中而不在 E^n 中讨论问题. 若我们令

$$x=(x_1, \cdots, x_n), \ t=x_{n+1}$$

而且用 (x, t) 来表示 E^{n+1} 中的点, 代替 $P(x, D)$ 我们将有算子

$$P(x, t, D_x, D_t)=\sum_{|\mu|+k\leqslant m} a_{\mu,k}(x, t)D_x^\mu D_t^k \tag{4-2}$$

其中 $$D_x=(D_1, \cdots, D_n), \ D_t=D_{n+1}$$

而 $$D_x^\mu=D_1^{\mu_1}\cdots D_n^{\mu_n}$$

设 Ω_0 是 E^{n+1} 的一个包含原点的区域, 又设 Ω 是 Ω_0 和半空间 $t>0$ 的交. 方程(4-2)在 Ω 中的 Cauchy 问题就是要求一个函数 $u(x, t)\in C^m(\overline{\Omega})$, 使得

$$P(x, t, D_x, D_t)u=f(x, t), \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{4-3}$$

而

$$D_t^k u(x, 0)=g_k(x), \text{ 在 } \partial_0\Omega \text{ 上}, 0\leqslant k<m \tag{4-4}$$

其中 f 是在 Ω 上的已知函数而 g_k 是在 Ω_0 和超平面 $t=0$ 的交

$\partial_0\Omega$ 上给定的函数. 我们说 Cauchy 问题(4-3), (4-4)是"适定的", 如果这个问题对于每组充分光滑的 f, g_0, $\cdots$, g_{m-1} 有唯一解.

在继续进行之前我们必须做一个注解. 为使等式(4-3)和(4-4)互不矛盾, 重要的是等式(4-2)中 D_t^m 的系数在 $\partial_0\Omega$ 上必须处处不为零. 因为若在一点 $(x, 0)\in\partial_0\Omega$ 处 D_t^m 的系数等于零, 则等式(4-3)就给出

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{|\mu|\leqslant m-k}a_{\mu,k}(x, 0)D_x^\mu g_k(x)=f(x, 0) \tag{4-5}$$

这将在点 $(x, 0)$ 处对 g_k 加上一个限制. 因为我们要求对于所有的 g_k 的选择都要有解(只要 g_k 是充分可微的), 所以我们要避免这一情况. 因此, 我们将假定

$$a_{(0,\cdots,0),m}(x, 0)\neq 0, \text{在 } \partial_0\Omega \text{ 上} \tag{4-6}$$

我们用"超平面 $t=0$ 不是算子(4-2)的**特征**"这一句话来描述这点.

4-2 弱　解

象往常一样, 我们从简单情形开始. 我们首先假定算子(4-2)是常系数算子. 其次, 把(4-4)中的 g_k 取为零, 我们甚至假定 $f\in C_0^\infty(\Omega)$. 因此我们的问题为

$$P(D)u=f, \text{ 在 } \Omega \text{ 中}, \tag{4-7}$$

$$D_t^k u(x, 0)=0, \text{ 在 } \partial_0\Omega \text{ 上}, 0\leqslant k<m \tag{4-8}$$

为了省时省事我们用以下的记号: $D=(D_x, D_t)$.

我们先从一个简单的观察开始. 因为 $f\in C_0^\infty(\Omega)$, 我们可以把 f 在 $\Omega_0-\Omega$ (Ω_0 的包含在半空间 $t\leqslant 0$ 的部分)中延拓为零. 延拓后的函数 f_1 显然仍属于 $C_0^\infty(\Omega)$. 现在假定 $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$ 是方程(4-7)和(4-8)的一个解. 我们看到如果把 u 在 $\Omega_0-\Omega$ 中延拓为零, 则延拓函数 u_1 属于 $C^m(\overline{\Omega}_0)$. 为证这点, 注意到所有的导数 $D_t^k u$, $0\leqslant k<m$, 在穿过曲面 $\partial_0\Omega$ 时都是连续的. 而且, 因为

$$P(D)=P(D_x,\ D_t)=\sum_{|\mu|+k\leqslant m} a_{\mu,k}D_x^\mu D_t^k \tag{4-9}$$

和

$$a=a_{(0,\cdots,0),m}\neq 0 \tag{4-10}$$

我们看到在 $\partial_0\Omega$ 上 $D_t^\nu u(x,\ 0)=0$ (回忆一下在 $\partial_0\Omega$ 上还有 $f=0$)，因为 f_1 和 u_1 在 $\Omega_0-\Omega$ 中都等于零，立即得到 u_1 是

$$P(D)u_1=f \tag{4-11}$$

在 Ω_0 中的一个解．特别，u_1 是弱解，由此

$$\int_{\Omega_0} u_1\overline{\overline{P}(D)\varphi}\,dx\,dt=\int_{\Omega_0} f_1\overline{\varphi}\,dx\,dt,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega_0) \tag{4-12}$$

因为 u_1 和 f_1 在 $\Omega_0-\Omega$ 中都等于零，这就化为

$$(u,\overline{P}(D)\varphi)=(f,\varphi),\varphi\in C_0^\infty(\Omega_0) \tag{4-13}$$

其中

$$(v,\ w)=\int_\Omega v\overline{w}\,dx\,dt \tag{4-14}$$

所有这一切的结果是：方程(4-7)，(4-8)的每一个解都满足方程(4-13)．现在来证明其逆．若 $u\in C^m(\overline{\Omega})$ 满足方程(4-13)，则 u 是方程(4-7)和(4-8)的解．为了证这一点，我们必须回到我们的分部积分公式上去（见 1-3 节(1-26)），因为并没有要求函数 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_0)$ 在 $\partial_0\Omega$ 上等于零．

用我们现在的记号，分部积分公式是

$$\int_\Omega D_k h\,dx\,dt=-i\int_{\partial\Omega} h\gamma_k\,d\sigma,\ \ 1\leqslant k\leqslant n+1 \tag{4-15}$$

其中 γ_k 是 x_k 轴和 $\partial\Omega$ 的外法向间的夹角的余弦．设 $\partial_1\Omega$ 是 $\partial\Omega$ 的不包含在超平面 $t=0$ 中的那部分．若 h 在 $\partial_1\Omega$ 附近为零，则等式(4-15)给出

$$\int_\Omega D_k h\,dx\,dt=0,\ 1\leqslant k\leqslant n \tag{4-16}$$

和

$$\int_\Omega D_t h\,dx\,dt=-i\int_{\partial_0\Omega} h\,dx \tag{4-17}$$

特别，若 $w\in C^1(\overline{\Omega})$ 而 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_0)$，则有

$$(D_k w,\ \varphi)=(w,\ D_k\varphi),\ 1\leqslant k\leqslant n \tag{4-18}$$

和

$$(D_t w,\ \varphi)=(w,\ D_t\varphi)-i\int_{\partial_0\Omega} w\bar{\varphi}\,dx \tag{4-19}$$

重复应用等式(4-19)，对于 $w\in C^k(\bar{\Omega})$ 和 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_0)$ 就得出

$$(D_t^k w,\ \varphi)=(w,\ D_t^k\varphi)-i\sum_{j=1}^{k}\int_{\partial_0\Omega} D_t^{k-j}w\overline{D_t^{j-1}\varphi}\,dx \tag{4-20}$$

现在我们把这些公式用到表达式 $(P(D)u,\ \varphi)$ 上去，其中 $u\in C^m(\bar{\Omega})$ 而 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_0)$，就给出

$$\begin{aligned}(P(D)u,\ \varphi)&=\sum_{|\mu|+k\leqslant m} a_{\mu,\ k}(D_x^\mu D_t^k u,\ \varphi)\\ &=\sum_{|\mu|+k\leqslant m} a_{\mu,k}\Big[(u,\ D_t^k D_x^\mu\varphi)\\ &\quad -i\sum_{j=1}^{k}\int_{\partial_0\Omega} D_t^{k-j}u\,\overline{D_t^{j-1}D_x^\mu\varphi}\,dx\Big]\\ &=(u,\bar{P}(D)\varphi)-i\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial_0\Omega} N_j u\,\overline{D_t^{j-1}\varphi}dx\end{aligned} \tag{4-21}$$

其中

$$N_j u=\sum_{k=j}^{m}\sum_{|\mu|\leqslant m-k} a_{\mu,k}D_x^\mu D_t^{k-j}u,\ 1\leqslant j\leqslant m \tag{4-22}$$

现在假定 $u\in C^m(\bar{\Omega})$ 对所有的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_0)$ 满足方程(4-13)．特别，对于所有的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 它也是成立的，因此 u 是方程(4-7)的解(见 1-6 节)．因此等式(4-21)就给出

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial_0\Omega} N_j u\,\overline{D_t^{j-1}\varphi}\,dx=0,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega_0) \tag{4-23}$$

我们断言等式(4-23)蕴含着

$$N_j u=0,\ 在\ \partial_0\Omega\ 上,1\leqslant j\leqslant m \tag{4-24}$$

我们把这点的证明推迟到本节的最后．目前我们注意到(4-24)式蕴含着等式(4-8)．事实上，由等式(4-22)

$$N_m u=au$$

$$N_{m-1}u=aD_t u+\sum_{|\mu|\leqslant 1} a_{\mu,m-1}D_x^\mu u$$

一般，$N_{m-k}u=aD_t^k u+$“一个只包含 $u,\ D_t u,\ \cdots,\ D_t^{k-1}u$ 及其关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的导数的线性表达式”．因为由(4-10) $a\neq 0$，所以在 $\partial_0\Omega$ 上 $N_m u=0$ 蕴含着在 $\partial_0\Omega$ 上 $u=0$，由此又知 $N_{m-1}u=0$ 蕴含着 $D_t u=0$，等等．这样，我们已经证明了

定理 4-1 函数 $u\in C^m(\overline{\Omega})$ 是方程(4-7), (4-8)的解, 当且仅当 u 满足方程(4-13).

我们愿指出定理 4-1 对任何 $f\in C(\overline{\Omega})$ 都成立. 事实上, 若 u 是方程(4-7)的解, 则由等式(4-21)

$$(u,\ \overline{P}(D)\varphi)-(f,\varphi)=i\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial_0\Omega}N_ju\overline{D_t^{j-1}\varphi}dx \tag{4-25}$$

现在, 考察一下等式(4-22)就知道 $D_t^m u$ 在任何 N_ju 中都不出现. 因此, 若 u 满足(4-8), 则对每个 j, 在 $\partial_0\Omega$ 上 $N_ju=0$, 这表明方程(4-13)成立. 反之, 若方程(4-13)成立, 则(4-23)也成立, 因而方程(4-8)成立.

由于有定理 4-1, 看来当 $u\in L^2(\Omega)$ 满足等式(4-13)时, 就把 u 称为方程(4-7), (4-8)的一个弱解就是自然的了. 在 4-3 节中我们将研究(4-7), (4-8)的弱解.

剩下来要证明从(4-23)可以推出(4-24). 这可从下列引理得到.

引理 4-2 若 $w_1(x), \cdots, w_m(x)$ 是 $\partial_0\Omega$ 上的连续函数, 而且

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial_0\Omega}w_j\overline{D_t^{j-1}\varphi}dx=0,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega_0) \tag{4-26}$$

则 w_j 恒等于零.

证明 假定对某个 j 和某点 $x_0\in\partial_0\Omega$, 我们有 $w_j(x_0)\neq 0$. 我们可以假定 $\operatorname{Re} w_j(x_0)>0$. 由连续性, 存在 x_0 的一个邻域 N, 使得对于 $x\in N$ $\operatorname{Re} w_j(x)>0$. 于是, 存在正常数 r, b, 使得柱体

$$|x-x_0|<2r,\ |t|<2b$$

包含在 Ω_0 中, 而 $|x-x_0|<2r$ 包含在 N 中. 设 $\psi(x)$ 是 $C_0^\infty(\partial_0\Omega)$ 中的一个函数, 使得

$$\psi(x)=1,\ |x-x_0|\leqslant r$$
$$\psi(x)=0,\ |x-x_0|\geqslant 2r$$
$$0\leqslant\psi(x)\leqslant 1,\ x\in\partial_0\Omega$$

又设 $\rho(t)$ 是 $C_0^\infty(E^1)$ 中的函数, 满足

$$\rho(t)=1,\ |t|\leqslant b$$

$$\rho(t)=0,\ |t|\geqslant 2b$$

(这种函数的作法见 1-3 节). 令

$$\varphi(x,\ t)=(it)^{j-1}\psi(x)\rho(t)$$

显然,$\varphi\in C_0^\infty(\Omega_0)$. 而且,对于 $k\neq j-1$, $D_t^k\varphi(x,\ 0)=0$,并且

$$D_t^{j-1}\varphi(x,\ 0)=(j-1)!\psi(x)$$

这就证明了这个函数在 $|x-x_0|<r$ 中是正的,在 N 中是非负的,并且在 N 外等于零. 因此,我们一定有

$$\operatorname{Re}\int_{\partial_0\Omega}w_j(x)D_t^{j-1}\varphi(x,\ 0)dx>0 \qquad (4\text{-}27)$$

但这是不可能的,因为对于所选择的 φ 来说,(4-27)的左端等于(4-26)的左端的实部. 这就完成了证明.

4-3 双曲型方程

我们稍微仔细一点来考察方程(4-7),(4-8)的弱解. 首先我们指出由 1-6 节的推理立即给出

定理 4-3 对于任何 $f\in L^2(\Omega)$,方程(4-7),(4-8)有弱解的一个必要充分条件是

$$|(f,\ \varphi)|\leqslant C\|\bar{P}(D)\varphi\|,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega_0) \qquad (4\text{-}28)$$

此外,我们有

定理 4-4 对于所有的 $f\in L^2(\Omega)$,方程(4-7),(4-8)有弱解的一个必要充分条件是

$$\|\varphi\|\leqslant C\|\bar{P}(D)\varphi\|,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega_0) \qquad (4\text{-}29)$$

证明 充分性是明显的,因为,根据 Schwarz 不等式(1-62),(4-29)蕴含着对每个 $f\in L^2(\Omega)$,有

$$|(f,\ \varphi)|\leqslant\|f\|\ \|\varphi\|\leqslant\|f\|C\|\bar{P}(D)\varphi\|.$$

为证必要性,假定不等式 (4-28) 对每个 $f\in L^2(\Omega)$ 都成立. 若(4-29)不成立,则在 $C_0^\infty(\Omega_0)$ 中应有一个函数序列 $\{\varphi_k\}$,使得

$$\|\varphi_k\|\to\infty,\ \|\bar{P}(D)\varphi_k\|=1,\ k\to\infty \qquad (4\text{-}30)$$

令 $\qquad F_k(f)=(f,\ \varphi_k),\ f\in L^2(\Omega)\quad k=1,\ 2,\cdots$

则对每个 k，F_k 是 $L^2(\Omega)$ 上的一个有界线性泛函，而对每个 $f\in L^2(\Omega)$，由 (4-28)，我们有

$$|F_k(f)|\leqslant|(f,\ \varphi_k)|\leqslant C\|\bar{P}(D)\varphi_k\|=C$$

所以

$$\operatorname*{lub}_{k}|F_k(f)|<\infty$$

根据 Banach-Steinhaus 定理(1-5 节定理 1-10)，应存在常数 C，使得

$$|F_k(f)|\leqslant C\|f\|,\ f\in L^2(\Omega),\ k=1,\ 2,\ \cdots$$

因此

$$|(f,\ \varphi_k)|\leqslant C\|f\|,\ f\in L^2(\Omega),\ k=1,\ 2,\ \cdots$$

取 $f=\varphi_k$，我们得到

$$\|\varphi_k\|\leqslant C$$

这与(4-30)矛盾．因此(4-29)成立． 证毕．

特别，我们知道，对于任何区域 $\Omega_0\subset E^{n+1}$，当且仅当不等式(4-29)成立时，方程(4-7)，(4-8)对于每个 $f\in L^2(\Omega)$ 都有弱解．自然要问什么样的算子 $P(D)$ 满足(4-29)呢？在这方面我们有

定理 4-5 若 Ω 包含形为 $0<t<2b$，$b>0$ 的一块带形区域，且 $P(D)$ 满足(4-29)，则存在常数 K，使得若对实的 ξ 有 $P(\xi,\ \tau)=0$ 成立，则

$$|\operatorname{Im}\tau|\leqslant K \tag{4-31}$$

证明　设$(\xi,\ \tau)$中 ξ 为实数，且使 $P(\xi,\ \tau)=0$．设 $\psi(x)\neq0$ 是 $C_0^\infty(E^n)$ 中的函数，又设 $\rho(t)$ 是 $C_0^\infty(E^1)$ 中的函数，它满足

$$\rho(t)=1,\qquad |t|\leqslant b$$

$$\rho(t)=0,\qquad |t|\geqslant 2b$$

且

$$0\leqslant\rho(t)\leqslant1,\qquad |t|\leqslant 2b$$

令

$$\varphi_\varepsilon(x,\ t)=\psi(\varepsilon x)\rho(t)\exp(i(x,\ \xi)+it\tau) \tag{4-32}$$

我们可以取 Ω_0 包含带形区域 $|t|\leqslant 2b$．这时 $\varphi_\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega_0)$，因此对于 φ_ε，根据假设，不等式(4-29)是成立的．于是

$$\|\varphi_\varepsilon(x,\ t)\|^2=\int|\psi(\varepsilon x)|^2dx\int_0^{2b}\exp(2t\operatorname{Im}\tau)|\rho(t)|^2dt$$

$$\geqslant\varepsilon^{-n}\|\psi(x)\|^2\int_0^b\exp(2t\operatorname{Im}\tau)dt$$

另一方面

$$\bar{P}(D)\varphi_\varepsilon=\sum_{|\mu|+k>0}\frac{1}{\mu!k!}\bar{P}^{(\mu,k)}(D)$$

$$\times\exp(i(x,\ \xi)+it\tau)D_x^\mu\psi(\varepsilon x)D_t^k\rho(t)$$

$$=\exp(i(x,\ \xi)+it\bar{\tau})\sum_{|\mu|+k>0}\frac{1}{\mu!k!}$$

$$\bar{P}^{(\mu,k)}(\xi,\ \bar{\tau})D_x^\mu\psi(\varepsilon x)D_t^k\rho(t)$$

其中 $$P^{(\mu,k)}(\xi,\ \tau)=\frac{\partial^{|\mu|+k}P(\xi,\ \tau)}{\partial\xi^\mu\partial\tau^k}$$

因此

$$|\bar{P}(D)\varphi_\varepsilon|\leqslant\exp(t\,\mathrm{Im}\,\tau)\sum_{|\mu|+k>0}\frac{1}{\mu!k!}$$

$$\times|P^{(\mu,k)}(\xi,\ \tau)||D_x^\mu\psi(\varepsilon x)D_t^k\rho(t)|$$

因此

$$\|\bar{P}(D)\varphi_\varepsilon\|^2\leqslant C\sum_{|\mu|+k>0}|P^{(\mu,k)}(\xi,\tau)|^2\|D_x^\mu\psi(\varepsilon x)\|^2$$

$$\times\int_0^{2b}\exp(2t\,\mathrm{Im}\,\tau)|D_t^k\rho(t)|^2dt$$

$$\leqslant\varepsilon^{-n}C_1\sum_{k>0}|P^{(0,k)}(\xi,\ \tau)|^2\|\psi(x)\|^2\int_b^{2b}\exp(2t\,\mathrm{Im}\,\tau)dt$$

$$+\varepsilon^{-n}C_2\sum_{|\mu|>0}\varepsilon^{2|\mu|}\sum_{k\geqslant0}|P^{(\mu,k)}(\xi,\ \tau)|^2\|D_x^\mu\psi(x)\|^2$$

$$\times\int_b^{2b}\exp(2t\,\mathrm{Im}\,\tau)dt$$

代入(4-29)，我们有

$$\int_0^b\exp(2t\,\mathrm{Im}\,\tau)dt\leqslant C_3\sum_{k>0}|P^{(0,k)}(\xi,\ \tau)|^2\int_b^{2b}\exp(2t\,\mathrm{Im}\,\tau)dt$$

$$+C_4\sum_{|\mu|>0}\varepsilon^{2|\mu|}\sum_{k\geqslant0}|P^{(\mu,k)}(\xi,\ \tau)|^2\int_b^{2b}\exp(2t\,\mathrm{Im}\,\tau)dt \quad (4\text{–}33)$$

令 $\varepsilon\to0$，若 $\mathrm{Im}\,\tau\leqslant0$，由(4–33)就得出

$$1-\exp(2b\,\mathrm{Im}\,\tau)\leqslant C_5(1+|\xi|+|\tau|)^{2m}(\exp(2b\,\mathrm{Im}\,\tau)$$

$$-\exp(4b\,\mathrm{Im}\,\tau))$$

这表明

$$1\leqslant C_6(1+|\xi|+|\tau|)^{2m}\exp(2b\,\mathrm{Im}\,\tau)$$

因此

$$|\mathrm{Im}\,\tau|\leqslant\frac{1}{2b}[\ln C_6+2m\ln(1+|\xi|+|\tau|)] \qquad (4\text{-}34)$$

τ 代数地依赖于 ξ，因此 $\mathrm{Im}\,\tau$ 代数地依赖于 ξ 和 $\mathrm{Re}\,\tau$. 因此，若当 $|\xi|^2+(\mathrm{Re}\,\tau)^2\to\infty$ 时 $|\mathrm{Im}\,\tau|$ 是无界的话，则 $|\mathrm{Im}\,\tau|$ 应该象 $|\xi|^2+(\mathrm{Re}\,\tau)^2$ 的某个幂那样趋于无穷. 这种可能性由于(4-34)而消除了. 因此当 $\mathrm{Im}\,\tau\leqslant 0$ 时，(4-31)得到证明(见2-6节). 为证 $\mathrm{Im}\,\tau>0$ 时(4-31)成立，注意到我们可以把 $P(\xi,\tau)$ 写成下列形式

$$P(\xi,\tau)=a\tau^m+a_1(\xi)\tau^{m-1}+\cdots+a_m(\xi) \qquad (4\text{-}35)$$

其中 $a_j(\xi)$ 是 ξ 的次数 $\leqslant j$ 的多项式. 于是，由代数基本定理，对每个 ξ 存在 $P(\xi,\tau)=0$ 的 m 个根 $\tau_1,\cdots,\tau_m$. 而且

$$\sum_1^m\tau_j=-\frac{a_1(\xi)}{a} \qquad (4\text{-}36)$$

所以

$$\sum_1^m\mathrm{Im}\,\tau_j=-\mathrm{Im}\left[\frac{a_1(\xi)}{a}\right]$$

$\mathrm{Im}[a_1(\xi)/a]$ 是 ξ 的次数 $\leqslant 1$ 的多项式. 而且，我们刚刚证明了

$$\sum_1^m\mathrm{Im}\tau_j\geqslant -C_7 \qquad (4\text{-}37)$$

这表明

$$\mathrm{Im}\left[\frac{a_1(\xi)}{a}\right]\leqslant C_7$$

而以某常数为上界的、次数 $\leqslant 1$ 的多项式只可能是常数. 因此

$$\sum_1^m\mathrm{Im}\,\tau_j=C_8$$

因此，对每个 k，有

$$\mathrm{Im}\,\tau_k=C_8-\sum_{j\neq k}\mathrm{Im}\,\tau_j\leqslant C_8+(\mathrm{m}-1)K$$

从而证明了(4-31).

满足(4-31)的算子 $P(D)$ 被称为关于 t 轴是双曲型的算子. 当不会产生混淆时，我们将把它简称做双曲型算子. 在4-4节中我们将研究这种算子的某些性质.

4-4 双曲型算子的性质

从定义我们立即看到

引理 4-6 算子 $P(D)$ 是双曲型的，当且仅当 $\bar{P}(D)$ 是双曲型算子.

另一个简单的推论是

定理 4-7 设

$$p(D)=\sum_{|\mu|+k=m} a_{\mu,k} D_x^\mu D_t^k \tag{4-38}$$

表示 $P(D)$ 的主部(见 2-4 节). 若 $P(D)$ 是双曲型的，则对于实的 ξ, $p(\xi, \tau)$ 只有实根 τ. 因此 $p(D)$ 是双曲型的.

证明 最后一个命题，即 $p(D)$ 是双曲型算子，从双曲性的定义得出(4-3 节). 为证 $p(\xi, \tau)$ 只有实根，假定 ξ 是实的而且 $p(\xi, \tau)=0$ 有使 $\operatorname{Im}\tau=c>0$ 的根 τ. 现在

$$\frac{P(\lambda\xi,\ \lambda z)}{\lambda^m}=p(\xi,\ z)+\frac{Q(\lambda\xi,\ \lambda z)}{\lambda^m} \tag{4-39}$$

其中 Q 是次数 $<m$ 的多项式. 设 Γ 是位于上半平面的中心在 τ、半径 $\leqslant c/2$ 的一个圆周，并使 $p(\xi, z)$ 在 Γ 上没有根. 因此对于 Γ 上的 z

$$|p(\xi,\ z)|\geqslant\delta>0 \tag{4-40}$$

并且，存在常数 M，使得对于 Γ 上的 z 有

$$|Q(\lambda\xi,\ \lambda z)|\leqslant M\lambda^{m-1} \tag{4-41}$$

因此当 λ 充分大时，对于 Γ 上的 z 有

$$\frac{Q(\lambda\xi,\ \lambda z)}{\lambda^m}<|p(\xi,\ z)|$$

由 Rouché 定理和等式(4-39)，我们知道 $P(\lambda\xi,\ \lambda z)/\lambda^m$ 在 Γ 内至少有一个根. 把它记做 σ. 由双曲性的定义我们有

$$|\operatorname{Im}\lambda\sigma|\leqslant K$$

或

$$|\operatorname{Im}\sigma|\leqslant\frac{K}{\lambda}$$

另一方面，因为 σ 在 Γ 的内部，我们一定有

$$\operatorname{Im}\sigma \geqslant \frac{c}{2} \tag{4-42}$$

这就给出 $c \leqslant 2K/\lambda$. 令 $\lambda \to \infty$，我们得到一个矛盾，它表明不能有 $\operatorname{Im}\tau > 0$. 类似的推理证明也不能有 $\operatorname{Im}\tau < 0$. 这就完成了证明.

推论 4-8 齐次多项式 $P(D)$ 是双曲型的，当且仅当 (4-10) 成立并且当 ξ 是实数时方程 $P(\xi, \tau)$ 只有实根.

下述定理给出了一个有用的判别法.

定理 4-9 若 $P(D)$ 的主部 $p(D)$ 是双曲型的，并且 $P(D)-p(D)$ 弱于 $p(D)$，则 $P(D)$ 是双曲型的.

在证明定理 4-9 之前，让我们先来给出这个定理的一个重要应用. 一个 m 阶齐次算子 $p(D)$ 被称为全双曲型的，如果 $p(\xi, \tau)$ 对每个实数 $\xi \neq 0$，有 m 个实的单根 τ. 这个概念的重要性起源于

定理 4-10 若 $p(D)$ 是 m 阶全双曲型算子，而 $Q(D)$ 是任何阶数 $<m$ 的算子，则 $P(D)=p(D)+Q(D)$ 是双曲算子.

证明　考虑多项式

$$p^{(k)}(\xi, \tau)=\frac{\partial p(\xi, \tau)}{\partial \xi_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

$$p^{(n+1)}(\xi, \tau)=\frac{\partial p(\xi, \tau)}{\partial \tau}$$

根据假设

$$p(\lambda\xi, \lambda\tau)=\lambda^m p(\xi, \tau), \quad \lambda>0 \tag{4-43}$$

在等式 (4-43) 的两边对 λ 微分，然后令 $\lambda=1$，我们得到

$$\sum_1^n \xi_k p^{(k)}(\xi, \tau)+\tau p^{(n+1)}(\xi, \tau)=m p(\xi, \tau) \tag{4-44}$$

于是

$$\sum_1^{n+1}\left|p^{(k)}(\xi, \tau)\right| \neq 0, \ \xi, \tau \text{ 为实的}, \ |\xi|+|\tau| \neq 0 \tag{4-45}$$

因为，否则的话，将存在一个实的 $(\xi, \tau) \neq 0$，使 $p^{(k)}(\xi, \tau)=0$. 由等式 (4-44) 就推出 $p(\xi, \tau)=0$. 但是这就意味着 τ 是 $p(\xi, \tau)=0$ 的至少二重的根，与假设相矛盾.

由 (4-45)，表达式

$$\frac{1}{\sum_{1}^{n+1}|p^{(k)}(\xi, \tau)|} \tag{4-46}$$

在集合 $|\xi|+|\tau|=1$ 上(ξ, τ 是实的)是连续的，因此在这个集合上有最大值 M. 而且(4-46)中的分母是$(m-1)$次齐次的. 因此，若(ξ, τ)是任何使 $|\xi|+|\tau|=\lambda\neq 0$ 的实向量，则

$$\frac{(|\xi|+|\tau|)^{m-1}}{\sum_{1}^{n+1}|p^{(k)}(\xi, \tau)|}=\frac{1}{\sum_{1}^{n+1}\left|p^{(k)}\left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\tau}{\lambda}\right)\right|}\leqslant M \tag{4-47}$$

这蕴含着存在另一个常数 M'，使得

$$(|\xi|+|\tau|+1)^{m-1}\leqslant M'\left(\sum_{1}^{n+1}|p^{(k)}(\xi, \tau)|+1\right) \tag{4-48}$$

这个不等式说明每个阶数 $<m$ 的算子都弱于 $p(D)$. 现在我们应用定理 4-9，就证明了定理 4-10.

定理 4-9 的证明基于以下几个引理. 在叙述并证明这些引理时我们要恢复到第一至三章所用过的记号.

引理 4-11 设 Q 是一个 m 次多项式，又假定对于复向量 ξ 和 ζ，我们有

$$Q(\xi+z\zeta)\neq 0, \text{ 当 } |z|<1, z \text{ 为复数时} \tag{4-49}$$

则

$$|Q(\xi+\zeta)|\leqslant 2^{m}|Q(\xi)| \tag{4-50}$$

证明　令 $g(z)=Q(\xi+z\zeta)$. 若 $z_1, \cdots, z_m$ 是 $g(z)$ 的复根，则由假设对 j 有 $|z_j|\geqslant 1$. 另一方面

$$\frac{Q(\xi+\zeta)}{Q(\xi)}=\frac{g(1)}{g(0)}=\prod_{1}^{m}\frac{(1-z_j)}{(-z_j)}$$

因此
$$\left|\frac{Q(\xi+\zeta)}{Q(\xi)}\right|\leqslant\prod_{1}^{m}\left(\frac{1}{|z_j|}+1\right)\leqslant 2^{m}$$

这正好是不等式(4-50).

引理 4-12 若多项式 $Q(\xi)$ 弱于多项式 $P(\xi)$，则对于每个复的 ζ，ξ 的多项式 $Q(\xi+\zeta)$ 弱于多项式 $P(\xi+\zeta)$.

证明　由 Taylor 展开

$$Q(\xi+\zeta)=\sum \frac{Q^{(\mu)}(\xi)\zeta^{\mu}}{\mu!}$$

由此
$$|Q(\xi+\zeta)|\leqslant|\zeta|^{k}\sum|Q^{(\mu)}(\xi)|$$

其中 k 是 $Q(\xi)$ 的次数. 由 3-4 节的定理 3-15, 这个式子给出

$$|Q(\xi+\zeta)|\leqslant C|\zeta|^{k}\sum|P^{(\nu)}(\xi)| \tag{4-51}$$

现在 $$P^{(\nu)}(\xi)=P^{(\nu)}(\xi+\zeta-\zeta)=\sum \frac{P^{(\nu+\mu)}(\xi+\zeta)(-\zeta)^{\mu}}{\mu!}$$

由此

$$|P^{(\nu)}(\xi)|\leqslant|\zeta|^{m}\sum|P^{(\mu)}(\xi+\zeta)| \tag{4-52}$$

其中 m 是 $P(\xi)$ 的次数. 结合 (4-51) 和 (4-52), 我们得到

$$|Q(\xi+\zeta)|\leqslant C|\zeta|^{k+m}\sum|P^{(\mu)}(\xi+\zeta)| \tag{4-53}$$

这就证明了 $Q(\xi+\zeta)$ 弱于 $P(\xi+\zeta)$. 证毕.

引理 4-13 假定

$$Q(\xi)=\sum_{0}^{m}Q_j(\xi)$$

其中每个 $Q_j(\xi)$ 是一个 j 次齐次多项式. 若 $p(\xi)$ 是 m 次齐次多项式, 而 $Q(\xi)$ 弱于 $p(\xi)$, 则每个 $Q_j(\xi)$ 都弱于 $p(\xi)$.

证明 设 $\lambda_0,\cdots,\lambda_m$ 是 $m+1$ 个不同的实数, 则

$$\sum_{j=0}^{m}\lambda_k^j Q_j(\xi)=Q(\lambda_k\xi),\quad 0\leqslant k\leqslant m \tag{4-54}$$

因为矩阵 (λ_k^j) 是非奇异的, 我们可以从方程组 (4-54) 解出 $Q_j(\xi)$ 用 $Q(\lambda_k\xi)$ 来表示. 因此

$$Q_j(\xi)=\sum_{k=0}^{m}\alpha_{jk}Q(\lambda_k\xi),\quad 0\leqslant j\leqslant m$$

由此

$$\begin{aligned}|Q_j(\xi)|&\leqslant C\sum_{k}|Q(\lambda_k\xi)|\leqslant C'\sum_{\mu,k}|p^{(\mu)}(\lambda_k\xi)|\\&\leqslant C''\sum_{\mu}|p^{(\mu)}(\xi)|\end{aligned}$$

因为 $p^{(\mu)}(\xi)$ 都是齐次的. 这就证明了每个 $Q_j(\xi)$ 都弱于 $p(\xi)$.

现在我们已准备好来给出

定理 4-9 的证明 我们断言只要证明存在 $\delta>0$, 使得从

$$\xi,\ \eta \text{ 实的},\ \zeta,\ \tau \text{ 复的},\ |\zeta|+|\tau|<\delta$$

能推出

$$p(\xi+\zeta,\ \eta+i+\tau)\neq 0 \tag{4-55}$$

就够了. 因为,假定(4-55)成立. 那么,由引理 4-11, 有

$$|p(\xi+\zeta,\ \eta+i+\tau)|\leqslant 2^m|p(\xi,\ \eta+i)|,\quad |\zeta|+|\tau|<\delta \tag{4-56}$$

于是,由第三章的引理 3-6 和 3-14,存在有限个实向量$(\zeta^{(k)},\tau^{(k)})$,它们满足 $|\zeta^{(k)}|+|\tau^{(k)}|<\delta$,使得 $p(\xi,\ \eta+i)$的每个导数可以表成如下形式

$$p^{(\mu)}(\xi,\ \eta+i)=\sum\lambda_k p(\xi+\zeta^{(k)},\ \eta+i+\tau^{(k)})$$

因此,由(4-56)

$$|p^{(\mu)}(\xi,\ \eta+i)|\leqslant C|p(\xi,\ \eta+i)|,\ \xi,\ \eta\ \text{实的} \tag{4-57}$$

现在

$$P(\xi,\ \tau)=\sum_0^m p_k(\xi,\ \tau)$$

其中 p_k 是 k 次齐次多项式, $p_m=p$. 由假设和引理 4-13, 每个 p_k 均弱于 p. 因此由引理 4-12 每个 $p_k(\xi,\ \eta+i)$均弱于$p(\xi,\ \eta+i)$. 由(4-57)这就给出

$$|p_k(\xi,\ \eta+i)|\leqslant C|p(\xi,\ \eta+i)|,\ 0\leqslant k\leqslant m \tag{4-58}$$

那么,若 λ 是实的,

$$\begin{aligned}|p_k(\xi,\ \eta+\lambda i)|&=|\lambda|^k\left|p_k\left(\frac{\xi}{\lambda},\ \frac{\eta}{\lambda}+i\right)\right|\\&\leqslant|\lambda|^k C\left|p\left(\frac{\xi}{\lambda},\ \frac{\eta}{\lambda}+i\right)\right|\\&\leqslant|\lambda|^{k-m}C|p(\xi,\ \eta+\lambda i)|\end{aligned}$$

换言之,

$$|P(\xi,\ \tau)-p(\xi,\ \tau)|\leqslant\frac{mC|p(\xi,\ \tau)|}{|\mathrm{Im}\,\tau|},\ |\mathrm{Im}\,\tau|\geqslant 1$$

特别

$$\begin{aligned}|P(\xi,\ \tau)|&\geqslant|p(\xi,\ \tau)|-|P(\xi,\ \tau)-p(\xi,\ \tau)|\\&\geqslant|p(\xi,\ \tau)|\left(1-\frac{mC}{|\mathrm{Im}\,\tau|}\right)\end{aligned} \tag{4-59}$$

因为$p(\xi,\ \tau)$是双曲型的, 故当 $\mathrm{Im}\,\tau\neq 0$ 时 $p(\xi,\ \tau)$不等于零. 于是不等式(4-59)表明, 当$|\mathrm{Im}\,\tau|>\max[1,\ mC]$时,$P(\xi,\ \tau)$不等于0. 于是 P 就是双曲型的.

所以，余下只要证明(4–55)．在证明中我们将利用下列重要引理．

引理 4–14 设

$$P(\xi,\ z)=\sum_{k=0}^{m}a_k(\xi)z^k \tag{4–60}$$

是 z 的多项式，系数 $a_k(\xi)$ 在 $\xi=\xi_0$ 连续．假定 $a_m(\xi_0)\neq 0$，又设 $z_1(\xi),\cdots,z_m(\xi)$ 是当 ξ 给定时

$$P(\xi,\ z)=0 \tag{4–61}$$

的 m 个根．那么，通过把这些根适当地排个次序，我们有

$$z_j(\xi)\to z_j(\xi_0),\ 当\ \xi\to\xi_0,\ 1\leqslant j\leqslant m \tag{4–62}$$

暂时承认这个引理，让我们继续证明(4–55)．首先注意到把 $\operatorname{Re}\zeta$ 吸收到 ξ 中以及把 $\operatorname{Re}\tau$ 吸收到 η 中去，(4–55)可以由

$$p(\xi+i\theta,\ \eta+i+i\lambda)\neq 0$$

$$\xi,\ \theta,\ \eta,\ \lambda\ 为实的,\ |\theta|+|\lambda|<\delta \tag{4–63}$$

得出．换句话说，我们不要 $z=i$ 是

$$p\left[\xi+z\theta,\ \ \eta+\frac{i}{2}+z\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\right]=0 \tag{4–64}$$

的根．因为

$$p\left(0,\ \frac{1}{2}+z\right)=a\left(\frac{1}{2}+z\right)^m$$

这个 z 的多项式只有根 $z=-\frac{1}{2}$．由引理 4–14，存在足够小的 $\delta>0$，使得当 $|\theta|+|\lambda|<\delta$ 时 z 的多项式

$$p\left(\theta,\ \frac{1}{2}+\lambda+z\right) \tag{4–65}$$

只有负根(注意(4–65)中 z^m 的系数是 $p(0,\ 1)=a\neq 0$.) 于是 p 的双曲性告诉我们：当 $\operatorname{Im}\tau>0$ 时

$$p\left(\xi+z\theta,\ \eta+\tau+z\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\right)=0,\ \xi,\ \theta,\ \eta,\ \lambda\ 实的,$$

$$|\theta|+|\lambda|<\delta \tag{4–66}$$

没有实根 z．而且，因为当 $|\theta|+|\lambda|<\delta$ 时(4–65)只有负根，所以

当 $|\theta|+|\lambda|<\delta$ 时等式(4-66)中 z^m 的系数是 $p\left(\theta,\lambda+\dfrac{1}{2}\right)\neq 0$. 因此(4-66)的根连续依赖于 τ, 而且若 $\mathrm{Im}\,\tau>0$, 则这些根不可能是实的. 如果能证明对于某个满足 $\mathrm{Im}\,\tau>0$ 的 τ, 这些根都有负的虚部,那么将推出对于满足 $\mathrm{Im}\,\tau>0$ 的任何 τ, 这些根都有负的虚部. 特别,将推出对于 $\tau=i/2$, $z=i$ 不能是方程(4-66)的一个根. 这正是我们要的结果.

为了证明存在一个满足 $\mathrm{Im}\,\tau>0$ 的 τ, 使得方程(4-66)的所有的根都有负虚部,令 $\tau=i\rho$, 且设 z 是(4-66)的任何一个根. 如果我们令 $\sigma=z/\rho$, 则 σ 是

$$p\left(\frac{\xi}{\rho}+\sigma\theta,\ \frac{\eta}{\rho}+i+\sigma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\right)=0$$

的一个根. 于是当 $\rho\to\infty$ 时,这个方程趋于

$$p\left(\sigma\theta,\ i+\sigma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\right)=0 \tag{4-67}$$

因此,当 $\rho\to\infty$ 时, σ 趋向于方程(4-67)的一个根(引理 4-14). 但是任何满足(4-67)的 σ 都满足

$$p\left(\theta,\ \lambda+\frac{1}{2}+\frac{i}{\sigma}\right)=0$$

因为(4-65)只有负根, 因此 i/σ 一定是负的. 这就表明对于 $\tau=i\rho$, 当 $\rho\to\infty$ 时 $z\to-\infty$. 因为 z 是方程(4-66)的任何一个根. 这就推出对于 $\tau=i\rho$ 和充分大的 ρ, 方程(4-66)的一切根都有负虚部. 这就完成了证明.

剩下的是要给出引理 4-14 的证明.

设 $P(\xi_0, z(\xi_0))=0$. 设 $\varepsilon>0$ 是任何一个数,使得对于

$$|z-z(\xi_0)|=\varepsilon$$

有 $P(\xi_0, z)\neq 0$ (因为至多只有 $m-1$ 个另外的根, 所以对于所有 $\varepsilon>0$, 这都是对的,至多有 ε 的 $m-1$ 个值除外). 设 Γ 是中心在 $z(\xi_0)$、半径为 ε 的圆周. 因为在 Γ 上 $P(\xi_0, z)\neq 0$, 所以存在 $\delta>0$, 使得在 Γ 上有 $|P(\xi_0, z)|\geqslant\delta$. 令

$$M=\max_{z\in\Gamma}|z|$$

又取 ξ 充分靠近 ξ_0，使得

$$\sum_0^m |a_k(\xi)-a_k(\xi_0)|M^k<\frac{\delta}{2}$$

这意味着对于这样的 ξ 和 $z\in\Gamma$，有

$$|P(\xi,\ z)-P(\xi_0,\ z)|\leqslant\frac{\delta}{2}<|P(\xi_0,\ z)|$$

因此由 Rouché 定理，多项式

$$P(\xi,\ z)=P(\xi_0,\ z)+[P(\xi,\ z)-P(\xi_0,\ z)]$$

在 Γ 内和多项式 $P(\xi_0,\ z)$ 具有一样多的根（重根的重数计算在内）．因为 $P(\xi,\ z)$ 和 $P(\xi_0,\ z)$ 都正好只有 m 个根，这就证明了引理．

算子 $P(D)$ 叫做全双曲型算子，如果它的主部（即最高阶的项）是全双曲型的．定理 4–10 断言每个全双曲型算子是双曲型算子．

4–5 常微分方程

现在我们来考察一个常微分方程问题．设 $P(\tau)$ 是形为

$$P(\tau)=\sum_0^m a_k\tau^k \tag{4-68}$$

的多项式，其中 a_k 是复常数．我们假定 $a_m\neq 0$，而且为方便计我们令

$$a_m=1 \tag{4-69}$$

考虑下列问题

$$P(D_t)u(t)=f(t),\ t\geqslant 0 \tag{4-70}$$

$$D_t^k u(0)=g_k,\ 0\leqslant k<m \tag{4-71}$$

其中 $f(t)$ 是一在 $t\geqslant 0$ 上的连续函数而 g_k 是给定的常数．我们要对所有的 f 和 g_k 解方程(4–70)，(4–71)．为此，我们首先注意到我们所需要知道的一切就是如何解下述问题

$$P(D_t)u(t)=0,\ t\geqslant 0 \tag{4-72}$$

$$D_t^k u(0)=0,\ 0\leqslant k<m-1 \tag{4-73}$$

$$D_t^{m-1}u(0)=1 \tag{4-74}$$

因为假设我们会解问题(4-72)—(4-74). 设 $w(t)$ 是 (4-72)—(4-74)的一个解. 令 $u_0(t)=g_0w(t)$,而且归纳地定义

$$u_j(t)=\left[g_j-\sum_{i=1}^{j}D_t^{m+j-1}u_{i-1}(0)\right]w(t),\ 1\leqslant j<m \tag{4-75}$$

令

$$u(t)=\sum_{j=1}^{m}D_t^{m-j}u_{j-1}(t) \tag{4-76}$$

显然 $u(t)$ 是方程 (4-72) 的一个解. 而且由 (4-73), (4-74) 和 (4-75)

$$D_t^k u(0)=\sum_{j=1}^{m}D_t^{m+k-j}u_{j-1}(0)=\sum_{j=1}^{k+1}D_t^{m+k-j}u_{j-1}(0)$$

$$=D_t^{m-1}u_k(0)+\sum_{j=1}^{k}D_t^{m+k-j}u_{j-1}(0)=g_k$$

因此(4-76)是(4-71)和(4-72)的一个解. 为了得到(4-70), (4-71)的解, 我们只要在等式(4-76)上加上

$$P(D_t)v(t)=f(t),\ t\geqslant 0 \tag{4-77}$$

和

$$D_t^k v(0)=0,\ 0\leqslant k<m \tag{4-78}$$

的一个解 $v(t)$.

令

$$v(t)=i\int_0^t f(s)w(t-s)ds \tag{4-79}$$

微分(4-79)式, 我们得到

$$D_t v(t)=f(t)w(0)+i\int_0^t f(s)D_t w(t-s)ds \tag{4-80}$$

又由(4-73), 有

$$D_t^k v(t)=i\int_0^t f(s)D_t^k w(t-s)ds,\ 0\leqslant k<m \tag{4-81}$$

特别, 从 (4-81) 我们看到 v 满足(4-78). 对 $k=m-1$ 微分等式(4-81), 我们得到

$$D_t^m v(t)=f(t)D_t^{m-1}w(0)+i\int_0^t f(s)D_t^m w(t-s)ds$$

因此 $P(D_t)v(t)=f(t)+i\int_0^t f(s)P(D_t)w(t-s)ds=f(t)$

从而 $v(t)$ 是方程(4–77)，(4–78)的一个解．因此，如果我们能求得问题(4–72)—(4–74)的一个解 $w(t)$，我们就会解问题 (4–70)，(4–71)．另一方面，我们可以非常容易地写出一个解来．事实上，令

$$w(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{e^{itz}}{P(z)}dz \tag{4-82}$$

其中 Γ 是复 z 平面上的任何简单闭曲线，它把 $P(z)$ 的根包含在 Γ 的内部．显然由(4–82)式给出的函数是无穷次可微的，而且

$$D_t^k w(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{z^k e^{itz}}{P(z)}dt \tag{4-83}$$

特别

$$P(D_t)w(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{P(z)e^{itz}}{P(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma e^{itz}dz=0 \tag{4-84}$$

此外，把 Γ 取作以原点为中心，半径 R 充分大的圆周，我们得到

$$D_t^k w(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{R^k e^{ik\theta}\cdot ie^{i\theta}R\,d\theta}{R^m e^{im\theta}+Q(Re^{i\theta})}$$

其中 $Q(z)=P(z)-z^m$ 是一个次数 $<m$ 的多项式．令 $R\to\infty$，对于 $0\leqslant k<m-1$，我们得到 0，对于 $k=m-1$，我们得到 1．这就证明了(4–82)是问题(4–72)—(4–74)的一个解．

最后，我们要对上面给出的函数 $v(t)$ 和 $w(t)$ 推导几个有用的不等式．假定 $P(z)$ 的根都包含在带形区域 $|\mathrm{Im}\,z|\leqslant K$ 中．如果用 $\tau_1,\cdots,\tau_m$ 来表示这些根，把每个 τ_j 都用一个中心在 τ_j、边长为 2 并且平行于实轴和虚轴的正方形围起来．设 G 是这些正方形的并集而 Γ 是 G 的边界．虽然 Γ 可能不是一条简单闭曲线，但通过作割线的办法可使 Γ 成为简单闭曲线．而且 Γ 的长度至多为 $8m$．由于 Γ 的选法，我们有

$$|z-\tau_j|\geqslant 1,\ z\in\Gamma \tag{4-85}$$

令

$$P^{(k)}(z)=\frac{d^kP(z)}{dz^k} \tag{4-86}$$

则
$$\frac{P^{(k)}(z)}{P(z)}=\sum\frac{1}{(z-\tau_{j_1})\cdots(z-\tau_{j_k})}$$
因此，由(4-83)，我们有
$$|P^{(k)}(D_t)w(t)|\leqslant\frac{4mm!}{\pi(m-k)!}e^{t(K+1)},\ 0<k\leqslant m \quad (4\text{-}87)$$
现在
$$P^{(j)}(z)=\sum_{k=j}^{m}\frac{k!}{(k-j)!}a_k z^{k-j} \quad (4\text{-}88)$$
这就使我们可以对每个 k 来估计 $D_t^k w$. 如果我们同意对于 $j>m$，令 $a_{m-j}=0$，那么简单的归纳法就给出
$$|D_t^k w(t)|\leqslant C\left(1+\sum_1^k|a_{m-j}|\right)^k e^{t(K+1)},\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots \quad (4\text{-}89)$$
其中常数 C 只依赖于 k. 为了证明这一点，注意到当 $k=0$ 时(4-89)确实是对的. 我们只要应用 $P^{(m)}(z)=m!$ 这一事实以及(4-87)就行了. 现在假定对所有的 $k<j$，(4-89)都成立. 我们来证明，对于 $k=j$ (4-89)也成立. 若 $j\leqslant m$，由等式(4-88)，我们有
$$\begin{aligned}P^{(m-j)}(z)&=\sum_{k=m-j}^{m}\frac{k!}{(k+j-m)!}a_k z^{k+j-m}\\&=\frac{m!}{j!}z^j+\sum_{m-j}^{m-1}\frac{k!}{(k+j-m)!}a_k z^{k+j-m}\end{aligned}$$
因此，由(4-87)和归纳法假设
$$\begin{aligned}|D_t^j w(t)|&\leqslant C\left(e^{t(K+1)}+\sum_{m-j}^{m-1}|a_k|\,|D_t^{k+j-m}w|\right)\\&\leqslant C'\left[1+\sum_{k=m-j}^{m-1}|a_k|\left(1+\sum_{i=1}^{k+j-m}|a_{m-i}|\right)^{k+j-m}\right]e^{t(K+1)}\\&\leqslant C'\left[1+\sum_{k=m-j}^{m-1}|a_k|\left(1+\sum_{i=1}^{j}|a_{m-i}|\right)^{j-1}\right]e^{t(K+1)}\\&\leqslant C'\left(1+\sum_{i=1}^{j}|a_{m-i}|\right)^j e^{t(K+1)}\end{aligned} \quad (4\text{-}90)$$
这正是我们要证明的. 若 $j>m$，那么我们利用下列事实：
$$z^{j-m}P(z)=z^j+\sum_{k=0}^{m-1}a_k z^{k+j-m}$$
这个式子给出(4-90)，如果我们同意当 $i>m$ 时取 $a_{m-i}=0$，那么也就得出(4-89). 因此，不等式(4-89)对所有的 k 都成立.

现在我们可以来估计由(4-79)给出的 $v(t)$ 了. 由(4-81), 对于 $k<m$, 我们有

$$|D_t^k v(t)|\leqslant C\left(1+\sum_1^k|a_{m-j}|\right)^k\int_0^t|f(s)|e^{(t-s)(K+1)}ds$$

$$\leqslant C'\left(1+\sum_1^k|a_{m-j}|\right)^k e^{t(K+1)}\max_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)| \qquad (4\text{-}91)$$

若 $k\geqslant m$, 我们有

$$D_t^k v(t)=\sum_{j=m}^k D_t^{k-j}f(t)D^{j-1}w(0)+i\int_0^t f(s)D_t^k w(t-s)ds \qquad (4\text{-}92)$$

同样的推理给出

$$|D_t^k v(t)|\leqslant C\left(1+\sum_1^m|a_{m-j}|\right)^k e^{t(K+1)}\sum_{i=0}^{k-m}\max_{0<s<t}|D_t^i f(s)| \qquad (4\text{-}93)$$

4-6 解的存在性

现在我们已准备好了可以来证明一个存在定理. 在本节中我们假定 Ω 是一个带形区域 $0<t<b$. 关于 $S(\Omega)$ 的定义可以参看 2-3 节.

定理 4-15 假定 $P(D)$ 是双曲型的, 又设 f 是 $S(\Omega)$ 中任一函数. 那么存在一个函数 $u\in S(\Omega)$, 它满足方程(4-7), (4-8).

证明 设 F 表示关于变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的 Fourier 变换(见 2-3 和 2-5 节). 假设方程(4-7), (4-8)有一解 $u\in S(\Omega)$, 则对每个固定的 t, $u(x,t)$ 属于 $S(E^n)$. 令

$$h(\xi,t)=Fu(\xi,t)$$

我们有

$$P(\xi,D_t)h(\xi,t)=Ff(\xi,t),\ t\geqslant 0,\ \xi\in E^n \qquad (4\text{-}94)$$

$$D_t^k h(\xi,0)=0,\ 0\leqslant k<m,\ \xi\in E^n \qquad (4\text{-}95)$$

对于每个固定的 ξ, 这是 4-5 节中研究过的那种类型的常微分方程问题. 注意到 $P(D)$ 中 D_t^m 的系数是一个与 ξ 无关的非零常数.

我们可以把它取为1．根据4–5节的结果，方程(4–94)，(4–95)的解由

$$h(\xi,\ t)=i\int_0^t Ff(\xi,\ t)w(\xi,\ t-s)ds \tag{4–96}$$

给出，其中

$$w(\xi,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{e^{itz}}{P(\xi,\ z)}dz \tag{4–97}$$

而 Γ 是复平面中的一条简单闭曲线，Γ 把 $P(\xi,\ z)$ 的根包围在其内部．如果我们能证明 $h(\xi,\ z)$ 属于 $S(\Omega)$，由此将推出 $u(x,\ t)$ 也属于 $S(\Omega)$．此外，把逆 Fourier 变换应用到方程(4–94)，(4–95)上去，将证明 u 是方程(4–7)，(4–8)的一个解．

所以，余下的是要证明 $h\in S(\Omega)$．我们取 Γ 为4–5节中所述的曲线．因为根据(4–83)，有

$$D_t^k w(\xi,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{z^k e^{itz}dz}{P(\xi,\ z)}$$

由(4–89)，我们有

$$|D_t^k w(\xi,\ t)|\leqslant C(1+|\xi|)^{2k}e^{t(K+1)}$$

这里我们已经利用了 $P(\xi,\ z)$ 中 z^{m-j} 的系数是一个次数 $\leqslant j$ 的 ξ 的多项式这一事实．因此它以某个常数乘以 $(1+|\xi|)^j$ 为界．于是，证明

$$D_\xi^\mu\left[\frac{1}{P(\xi,\ z)}\right]=\frac{Q_\mu(\xi,\ z)}{P(\xi,\ z)^{|\mu|+1}} \tag{4–98}$$

就是一件简单的事情了，这里 Q_μ 是一个次数 $\leqslant(m-1)|\mu|$ 的多项式．因此，每个导数 $D_\xi^\mu D_t^k w(\xi,\ t)$ 是形为

$$C\xi^\nu\oint_\Gamma \frac{z^{j+k}e^{itz}dz}{P(\xi,\ z)^{|\mu|+1}}$$

的项的和，其中 C 为常数，$|\nu|+j\leqslant(m-1)|\mu|$．于是，$P(\xi,\ z)^r$ 满足关于 $P(\xi,\ t)$ 的所有的假设．因此，我们同样可以把不等式(4–89)应用到上述表达式．这就给出

$$|D_\xi^\mu D_t^k w(\xi,\ t)|\leqslant C(1+|\xi|)^{2(m-1)|\mu|+2k}e^{t(K+1)} \tag{4–99}$$

因为 $f\in S(\Omega)$，同样也有 $Ff\in S(\Omega)$．因此，对于每个 $j,\ k,\ \mu$，存在常数 C，使得

$$|D_\xi^\mu D_t^k Ff(\xi, t)| \leqslant \frac{C}{(1+|\xi|)^j}$$

由(4-92)，有

$$D_\xi^\mu D_t^k h(\xi, t) = \sum_{j=m}^{k} D_\xi^\mu [D_t^{k-j} Ff(\xi, t) D_t^{j-1} w(\xi, 0)]$$

$$+ i D_\xi^\mu \int_0^t Ff(\xi, t) D_t^k w(\xi, t-s) ds$$

应用上面两个不等式，对每个 j, k 和 μ 我们得到

$$|D_\xi^\mu D_t^k h(\xi, t)| \leqslant \frac{C}{(1+|\xi|)^j}$$

这就证明了 $h \in S(\Omega)$. 证毕.

与上述定理相对比，现在我们再证明一个关于弱解的定理.

定理 4-16 若 $P(D)$ 是双曲型的，则对于每个 $f \in L^2(\Omega)$，方程(4-7)，(4-8)有一个弱解.

定理 4-16 的证明要用到下面的基本引理.

引理 4-17 对于任何的 Ω, $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密.

我们把引理 4-17 的证明往后推迟一点，先利用引理 4-17 来给出

定理 4-16 的证明 设 f 是 $L^2(\Omega)$ 中的任意函数，则存在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的一个函数列 $\{f_k\}$，它在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到 f. 根据定理 4-15，对每个 f_k，存在(4-7)，(4-8)的解 u_k，它满足

$$\|u_k\| \leqslant C\|f_k\|, \ k=1, 2, \cdots \tag{4-100}$$

特别，u_k 是一个弱解，从而满足

$$(u_k, \overline{P}(D)\varphi) = (f_k, \varphi), \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega_0) \tag{4-101}$$

因为 f_k 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到 f，范数 $\|f_k\|$ 是有界的，由(4-100)，范数 $\|u_k\|$ 也是有界的. 由 1-5 节的定理 1-8 知，存在一个子序列(我们仍用 $\{u_k\}$ 来记这个子序列)弱收敛到一个函数 $u \in L^2(\Omega)$. 在等式(4-101)中令 $k \to \infty$，就给出

$$(u, \overline{P}(D)\varphi) = (f, \varphi), \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega_0) \tag{4-102}$$

这就证明了 u 是(4-7)，(4-8)的一个弱解. 证毕.

现在我们可以给出定理 4-5 的一个逆定理.

定理 4-18 若 $P(D)$ 是双曲型的，则不等式 (4-29) 与

$$\|\varphi\| \leqslant C\|P(D)\varphi\|, \ \varphi\in C_0^\infty(\Omega_0) \tag{4-103}$$

均成立，其中常数 C 只依赖于 $P(D)$ 和 b.

证明　由定理 4-16, 对于每个 $f\in L^2(\Omega)$ 方程 (4-7), (4-8) 有一个弱解. 因此，根据定理 4-4, (4-29) 成立. 根据引理 4-6 知道 $\bar{P}(D)$ 也是双曲型的，把同样的推理用到 $\bar{P}(D)$ 上去就得到不等式 (4-103).

现在我们给出

引理 4-17 的证明　设 Ω 是 E^n 中的任意区域，而设 u 是 $L^2(\Omega)$ 中的任意函数. 在 Ω 外定义 u 之值为零. 因此 $u\in L^2(E^n)$. 对于任何 $\varepsilon>0$, 我们可以找到一个函数 $w\in C^\infty(E^n)\cap L^2(E^n)$, 使得

$$\|u-w\|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4-104}$$

(2-2 节定理 2-3; 我们可以对充分小的 δ 取 $w=J_\delta u$) 于是存在一个有界区域 Ω_1, $\bar{\Omega}_1\subset\Omega$, 使得

$$\int_{\Omega-\Omega_1}|w|^2dx<\frac{\varepsilon^2}{4} \tag{4-105}$$

而且存在 $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$, 使得

$$0\leqslant\psi(x)\leqslant 1, \ x\in\Omega \tag{4-106}$$

对 $x\in\Omega_1$, $\psi(x)=1$ (见 1-3 节 (1-36). (1-37)), 于是 $\varphi=\psi w\in C_0^\infty(\Omega)$, 并且

$$\|u-\varphi\|\leqslant\|u-w\|+\|w-\varphi\|$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\left[\int_{\Omega-\Omega_1}|(1-\psi)w|^2dx\right]^{1/2}<\varepsilon$$

证毕.

现在让我们来说明怎样求解问题

$$P(D)u(x, t)=f(x, t), \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{4-107}$$

$$D_t^k u(x, 0)=g_k(x), \text{ 在 } \partial_0\Omega \text{ 上}, 0\leqslant k<m \tag{4-108}$$

定理 4-19 假定 $P(D)$ 是双曲型算子. 则对于每个 $f\in S(E^{n+1})$ 和每组函数 $g_0, \cdots, g_{m-1}\in S(E^n)$, 存在问题 (4-107), (4-108) 的一个满足 (4-94) 的解 $u\in C^\infty(\bar{\Omega})\cap L^2(\Omega)$,

证明 定理 4-19 可从定理 4-15 以及以下简单的结果推得. 这就是: 可以求得一个函数 $w\in S(E^{n+1})$, 使得

$$D_t^k w(x, 0)=g_k(x), \text{在 } \partial_0\Omega \text{ 上}, 0\leqslant k<m \tag{4-109}$$

一旦我们有了 w, 则只要解出问题

$$P(D)v=f-P(D)w, \text{ 在 } \Omega \text{ 中} \tag{4-110}$$

$$D_t^k v(x, 0)=0, \text{ 在 } \partial_0\Omega \text{ 上}, 0\leqslant k<m \tag{4-111}$$

就行了. 由定理 4-15 就可以解这个问题. 于是, 验证 $u=v+w$ 是问题(4-107), (4-108)的一个解就是一件简单的事情了.

为了求得一个满足(4-109)的 w, 设 $\rho(t)$ 是 $C_0^\infty(E^1)$ 中的一个函数, 它在 $t=0$ 的一个邻域中等于 1. 于是, 令

$$w(x, t)=\rho(t)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}t^k g_k(x) \tag{4-112}$$

这个函数就具有所要的性质.

4-7 唯 一 性

既然对于光滑函数 $f, g_0, \cdots, g_{m-1}$, 我们知道怎样解 Cauchy 问题(4-107), (4-108), 我们应该问一下解是否是唯一的. 从 Holmgrem (1901)所得的一个一般定理可推出解总是唯一的. 但是, 我们不去证明一般情形的 Holmgren 定理, 而只是证明下面的特殊情形.

定理 4-20 设 $P(\xi, \tau)$是m次多项式, 且 τ^m 的系数不等于零. 设 Ω 是带形区域 $0<t<b$, 其中 $b>0$. 设 $u\in C^\infty(\bar{\Omega})$是

$$P(D)u=0, \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{4-113}$$

$$D_t^k u(x, 0)=0, \ 0\leqslant k<m \tag{4-114}$$

的解. 若对每个 μ, k, $P^{(\mu, k)}(D)u\in L^2(\Omega)$, 则在 Ω 中 $u\equiv 0$.

注意这个定理说明由定理 4-15 给出的解是唯一的.

定理 4-20 可以利用引理 4-21 来证明.

引理 4-21 存在只依赖于 $P(D)$和 b 的常数 C, 使得

$$\int_{\Omega} e^{-\lambda t}|v|^2 dx\,dt \leqslant C\int_{\Omega} e^{-\lambda t}|P(D)v|^2 dx\,dt \qquad (4\text{-}115)$$

对所有实的 λ 和所有在 $t=b$ 附近等于零的 $v\in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ 都成立，v 还满足

$$D_t^k v(x, 0)=0,\ 0\leqslant k<m \qquad (4\text{-}116)$$

并使对于每个 μ, k, $P^{(\mu,k)}(D)v\in L^2(\Omega)$.

引理 4-21 的证明需要一点准备．我们先来说明怎样用引理 4-21 来证明定理 4-20.

定理 4-20 的证明 设 $\rho(t)$ 是 $C^{\infty}(E^1)$ 中的函数，它满足

$$\rho(t)=1,\ 0\leqslant t\leqslant a+\varepsilon$$

$$=0,\ a+2\varepsilon\leqslant t\leqslant b$$

$$0\leqslant\rho(t)\leqslant 1,\ 0\leqslant t<\infty$$

其中 a 和 ε 是使 $a+2\varepsilon<b$ 成立的任何正数．令 $v=u\rho$，其中 $u\in C^{\infty}(\bar{\Omega})\cap L^2(\Omega)$ 并且满足方程(4-113)和(4-114)，则 v 满足引理 4-21 的假设．因此(4-115)成立，从而对所有的实数 λ

$$\int_0^a\int_{E^n} e^{-\lambda t}|u|^2 dx\,dt \leqslant C\int_{a+\varepsilon}^b\int_{E^n} e^{-\lambda t}|P(D)v|^2 dx\,dt \quad (4\text{-}117)$$

成立．这就蕴含着，对于 $\lambda>0$

$$\int_0^a\int_{E^n}|u|^2 dx\,dt \leqslant e^{-\lambda\varepsilon}C\int_{a+\varepsilon}^b\int_{E^n}|P(D)v|^2 dx\,dt \quad (4\text{-}118)$$

注意到 $$P(D)v=\sum P^{(0,k)}(D)uD_t^k\frac{\rho}{k!}\in L^2(\Omega)$$

令 $\lambda\to\infty$，我们看到，对于 $0\leqslant t\leqslant a$，有 $u\equiv 0$. 因为 a 可以取任何 $<b$ 的数．

证毕．

在引理 4-21 的证明中，下面的定理是一个重要的工具．在其中我们恢复到以前的记号．

定理 4-22 设 Ω 是 E^n 中包含在立方体 $|x_k-a_k|<M/2$ 中的一个区域，则对所有的实向量 ξ，所有的 $\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$ 和所有次数 $\leqslant m$ 的多项式 $P(\xi)$，有

$$\int_{\Omega} e^{(\xi,x)}|P^{(k)}(D)\varphi|^2 dx \leqslant mM\int_{\Omega} e^{(\xi,x)}|P(D)\varphi|^2 dx \quad (4\text{-}119)$$

证明 若

$$P(\xi)=\sum_{|\mu|\leqslant m}a_\mu\xi^\mu$$

对于复向量ζ, 定义

$$P(D+\zeta)=\sum_{|\mu|\leqslant m}a_\mu(D+\zeta)^\mu$$

则

$$P(D)(\varphi e^{i(\zeta,x)})=\sum\frac{P^{(\mu)}(D)e^{i(\zeta,x)}D^\mu\varphi}{\mu!}=e^{i(\zeta,x)}\sum\frac{P^{(\mu)}(\zeta)D^\mu\varphi}{\mu!}$$
$$=e^{i(\zeta,x)}P(D+\zeta)\varphi \tag{4-120}$$

对于任何复向量ζ, $P(D-\zeta)$是一个常系数算子. 因此, 由 1-7 节引理 1-15

$$\int|P^{(k)}(D-\zeta)(\varphi e^{i(\zeta,x)})|^2dx$$
$$\leqslant mM\int|P(D-\zeta)(\varphi e^{i(\zeta,x)})|^2dx\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

因此, 由等式(4-120), 有

$$\int e^{-2(\operatorname{Im}\zeta,x)}|P^{(k)}(D)\varphi|^2dx\leqslant mM\int e^{-2(\operatorname{Im}\zeta,x)}|P(D)\varphi|^2dx$$

因为ζ是任何复向量, 我们可以取 $\operatorname{Im}\zeta=-\xi/2$. 证毕.

反复应用定理 4-22, 我们有

推论 4-23 对于所有的$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$和所有的实向量$\xi$

$$\int e^{(\xi,x)}|\varphi|^2dx\leqslant m!M^m\int e^{(\xi,x)}|P(D)\varphi|^2dx \tag{4-121}$$

我们还有

推论 4-24 不等式

$$\int e^{\lambda x_k}|v|^2dx\leqslant m!M^m\int e^{\lambda x_k}|P(D)v|^2dx \tag{4-122}$$

对所有的实数λ和所有这样的$v\in C^\infty(\overline{\Omega})$成立, 这种$v$当$|x|$很大时为零, 而且当$|\mu|<m$时在$\partial\Omega$上$D^\mu v=0$.

证明 设Ω_1是立方体$|x_k-a_k|<(M+\delta)/2$, 其中$\delta>0$. 在Ω外定义v的值为零. 则对于$\varepsilon<\delta/2$, $J_\varepsilon v\in C_0^\infty(\Omega_1)$. 而且

$$P(D)J_\varepsilon v=\int v(y)P(D_x)\,j_\varepsilon(y-x)\,dy$$
$$=\int v(y)P(-D_y)\,j_\varepsilon(y-x)\,dy$$
$$=\int P(D_y)v(y)\,j_\varepsilon(y-x)\,dy$$
$$=J_\varepsilon P(D)v, \tag{4-123}$$
(分部积分不会产生带有边界积分的项，因为 v 的所有直到 $m-1$ 阶的导数在 $\partial\Omega$ 上等于零.)把推论 4-23 应用到 $J_\varepsilon v$ 上去，由等式(4-123),我们得到

$$\int e^{\lambda x_k}|J_\varepsilon v|^2dx\leqslant m!\,(M+\delta)^m\int e^{\lambda x_k}|J_\varepsilon P(D)v|^2dx$$

现在函数 $e^{\lambda x_k}$ 在 Ω_1 中有界. 因此

$$\int e^{\lambda x_k}|J_\varepsilon v-v|^2dx\leqslant K\|J_\varepsilon v-v\|^2\to 0,\text{ 当 }\varepsilon\to 0\text{ 时}$$

对于 $J_\varepsilon P(D)v$, 类似的命题也成立. 由此

$$\int e^{\lambda x_k}|v|^2dx\leqslant m!\,(M+\delta)^m\int e^{\lambda x_k}|P(D)v|^2dx$$

因为对于任何 $\delta>0$ 这都成立,最终我们得到了不等式(4-122).

证毕.

最后,我们有

推论 4-25 对于所有 $v\in C^\infty(\overline{\Omega})$ 使得对一切 μ, $P^{(\mu)}(D)v\in L^2(\Omega)$, 而对 $|\mu|<m$ 在 $\partial\Omega$ 上有 $D^\mu v=0$, 则不等式(4-122)成立.

证明 设 $\psi(x)$ 是 $C_0^\infty(E^n)$ 中的函数,使得

$$\psi(x)=1,\ \text{对于 } |x|\leqslant 1$$
$$=0,\ \text{对于 } |x|\geqslant 2$$
$$0\leqslant\psi(x)\leqslant 1,\ \text{对于 } x\in E^n$$

令
$$\psi_R(x)=\psi\left(\frac{x}{R}\right)$$

则存在常数 C_μ, 使得

$$|D^\mu\psi_R|\leqslant\frac{C_\mu}{R^{|\mu|}}$$

现在对每个 R, 函数 $v\psi_R$ 满足推论 4-24 的假设. 此外

$$P(D)(v\psi_R)=\sum\frac{P^{(\mu)}(D)vD^{\mu}\psi_R}{\mu!}$$

由此

$$\int e^{\lambda x_k}|v\psi_R|^2dx\leqslant m!M^m\left[\sum\frac{C_\mu\left(\int e^{\lambda x_k}|P^{(\mu)}(D)v|^2dx\right)^{1/2}}{\mu!R^{|\mu|}}\right]^2$$

令 $R\to\infty$ 我们得到(4-122). 证毕.

最后只要注意到引理 4-21 是推论 4-25 的一个特殊情形.

习 题

4-1 若 $u\in C^m(\bar{\Omega})$ 且对于 $t=0$ 和 $0\leqslant k<m$, $D_t^ku=0$, 证明当 Ω_0 有界时, 在 Ω 中等于 u 而在 $\Omega_0-\Omega$ 中等于零的函数属于 $H^m(\Omega_0)$.

4-2 证明 $N_{m-k}u$ 是 4-2 节中所断言的形式.

4-3 在定理 4-5 的证明中, 当 Ω_0 不包含一个形为 $|t|\leqslant 2b$ 的带形区域时, 必须做怎样的修改.

4-4 给出不等式(4-34)的证明细节.

4-5 证明被一个常数从上面界住的次数 $\leqslant 1$ 的多项式只能是常数.

4-6 证明不等式(4-41).

4-7 证明不等式(4-48).

4-8 若 Ω 是带形区域 $0<t<b$ 而 $v\in S(\Omega)$, 证明 $fv\in S(\Omega)$.

4-9 证明等式(4-98).

4-10 若 $P(\xi,\tau)$ 是齐次多项式, 而 $\tau_1(\xi),\cdots,\tau_m(\xi)$ 是 $P(\xi,\tau)$ 的根. 证明

$$\tau_k(\lambda\xi)=\lambda\tau_k(\xi),\ \lambda>0,\ \xi\in E^n,\ 1\leqslant k\leqslant m$$

4-11 在推论 4-25 的证明中补上细节.

第五章 解的性质

5-1 强解的存在性

如果我们利用 Holmgren 唯一性定理(见 4-7 节定理 4-20),那么就可以改进 4-6 节的定理 4-16. 设 Ω 是带形区域 $0<t<b$, 假定说我们希望求解

$$P(D)u=f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{5-1}$$

$$D_t^k u(x,\ 0)=0, \quad 0\leqslant k<m \tag{5-2}$$

其中 $P(D)$ 是 m 阶双曲型算子. 若 f 是 $L^2(\Omega)$ 中任意给定的函数,我们知道存在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的函数序列 $\{\varphi_j\}$, 使得在 $L^2(\Omega)$ 中 $\varphi_j\to f$ (4-6 节引理 4-17). 而且, 由 4-6 节的定理 4-15, 存在 $u_j\in C^\infty(\overline{\Omega})$, u_j 是满足(5-2)式和方程 $P(D)u_j=\varphi_j$ 的一个解, 并对每个 j 和 k 有 $D_x^\mu D_t^k u_j\in L^2(\Omega)$. 因此, 对于每个 j, k, u_j-u_k 是 $P(D)u=\varphi_j-\varphi_k$ 和(5-2)的一个解. 由 4-7 节的定理 4-20, 解是唯一的. 因此, 我们可以应用 4-6 节的等式(4-94)去推出结论

$$\|u_j-u_k\|\leqslant C\|\varphi_j-\varphi_k\|\to 0, \quad \text{当 } j,\ k\to\infty \text{ 时}$$

因此, 存在一个函数 $u\in L^2(\Omega)$, 使得

$$u_k\to u,\ P(D)u_k\to f, \quad \text{在 } L^2(\Omega) \text{ 中} \tag{5-3}$$

我们把 u 叫做方程(5-1), (5-2)的强解. 我们已经证明了

定理 5-1 若 $P(D)$ 是双曲型的, 则对于每个 $f\in L^2(\Omega)$ 方程(5-1), (5-2)有一个强解.

显然, 每个强解也是一个弱解. 因为对强解的要求要比弱解多, 应该想到弱解不一定是强解. 实际上, 一般说来这是对的. 但是, 我们将证明, 在我们的特殊情形下, 每个弱解同样是一强解. 我们将通过证明定理 5-2 来证明这点.

定理 5-2 若 $P(D)$ 是双曲型的, 则方程(5-1), (5-2)的弱解是唯

一的.

推论 5-3 若 $P(D)$ 是双曲型的，则每个弱解也是一个强解.

推论容易从定理得到. 事实上，设 u_1 是方程(5-1)，(5-2)的一个弱解. 由定理 5-1，存在一个强解 u_2，它也是一个弱解. 因为只有一个弱解(定理 5-2)，我们有 $u_1=u_2$. 因此 u_1 是一个强解.

所以，余下只要证明定理 5-2. 设 Ω_0 是带域 $-1<t<b$. 我们必须证明若 $u\in L^2(\Omega)$ 并且

$$(u,\ \bar{P}(D)\varphi)=0,\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega_0) \tag{5-4}$$

则在 Ω 中 $u\equiv 0$. 因为当且仅当 $P(D)$ 是双曲型算子时 $\bar{P}(D)$ 才是双曲型算子，我们可以用

$$(u,\ P(D)\varphi)=0,\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega_0) \tag{5-5}$$

来代替(5-4)式.

我们将用到

定理 5-4 假定 $P(D)$ 是双曲型的，又设 g 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的任意函数，则存在 $S(\Omega_0)$ 中的函数 v, w, 使得在 $t=0$ 附近 v 等于零，在 $t=b$ 附近 w 等于零，并且

$$P(D)v=P(D)w=g \tag{5-6}$$

我们暂时把定理 5-4 的证明往后推一推，先来完成定理 5-2 的证明.

定理 5-2 的证明　设 g 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的任意函数，又设 w 是由定理 5-4 给出的函数. 设 $\psi(x)$ 是 $C_0^\infty(E^n)$ 中的函数，使得 $0\leqslant\psi\leqslant 1$，当 $|x|<1$ 时 $\psi(x)=1$，而当 $|x|>2$ 时 $\psi(x)=0$(见 1-3 节). 设 $\rho(t)$ 是 $C_0^\infty(E^1)$ 中的函数，使得当 $0<t<b$ 时 $\rho(t)=1$，而当 $t<-\dfrac{1}{2}$ 时 $\rho(t)=0$. 令

$$\varphi_R(x,\ t)=w(x,\ t)\rho(t)\psi(x/R),\ R>0 \tag{5-7}$$

显然对每个 $R>0$，$\varphi_R\in C_0^\infty(\Omega_0)$. 而且因为在 Ω 中 $\rho(t)=1$，由 1-7 节的等式(1-102)，在 Ω 中我们有

$$P(D)\varphi_R=\sum\frac{P^{(\mu,0)}(D)wD_x^\mu\psi(x/R)}{\mu!}=\sum\frac{P^{(\mu,0)}(D)w\psi_\mu(x/R)}{\mu!R^{|\mu|}} \tag{5-8}$$

其中 $\psi_\mu(x)=D_x^\mu\psi(x)$．因此

$$\|P(D)(\varphi_R-w)\|\leqslant\|[1-\psi(x/R)]P(D)w\|$$
$$+M\sum_{|\mu|\neq0}\frac{\|P^{(\mu,0)}(D)w\|}{\mu!R^{|\mu|}}$$

其中
$$M=\max_{|\mu|\leqslant m}\max_x|\psi_\mu(x)|$$

设 $\varepsilon>0$ 给定，并且取 R 足够大，使得

$$\int_0^b\int_{|x|>R}|P(D)w|^2dxdt<\frac{\varepsilon^2}{4}$$

和
$$M\sum_{|\mu|\neq0}\|P^{(\mu,0)}(D)w\|<\frac{\varepsilon R}{2}$$

因为当 $|x|<R$ 时，$\psi(x/R)=1$，这就给出

$$\|P(D)(\varphi_R-w)\|<\varepsilon$$

这就证明了当 $R\to\infty$ 时，$P(D)\varphi_R\to P(D)w=g$．现在假设 $u\in L^2(\Omega)$ 满足等式(5-5)．特别，对每个 R 我们有

$$(u,\ P(D)\varphi_R)=0$$

当 $R\to\infty$ 在这等式中取极限，我们看到 $(u,\ g)=0$．因为 g 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的一个任意函数，我们有

$$(u,\ \varphi)=0,\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega)\tag{5-9}$$

但是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密(4-6 节引理 4-17)．因此，存在一个序列 $\{\varphi_k\}\in C_0^\infty$ 收敛到 u．因此，(5-9)蕴含着 $\|u\|=0$，从而 $u=0$．这就完成了定理 5-2 的证明．

现在我们转到

定理 5-4 的证明 设 $\delta>0$，使得在 $0<t<b$ 中 $g=0$，又设 Ω_δ 表示带形区域 $\delta<t<b$．由 4-6 节的定理 4-15，存在函数 $v\in S(\Omega_\delta)$，使得

$$P(D)v=g,\ 在\ \Omega_\delta\ 中\tag{5-10}$$
$$D_t^kv(x,\ \delta)=0,\ 0\leqslant k<m\tag{5-11}$$

因为 $P(D)$ 中 D_t^m 的系数不等于零，又因为 $g(x,\ \delta)=0$ 我们看到 $D_t^mv(x,\ \delta)=0$．现在，v 和 g 都属于 $C^\infty(\overline{\Omega}_\delta)$．因此，我们可以将方程(5-10)两边对 t 微分．因为对于每个 k，$D_t^kg(x,\ \delta)=0$，我们

知道对每个 $k, D_t^k v(x, \delta)=0$. 如果我们定义 $v(x, t)$ 在 $0<t<\delta$ 中等于零, 我们看到 $v\in S(\Omega)$.

为了构造 w, 注意到当 $P(D_x, D_t)$ 是双曲型算子时, 算子 $P(D_x, -D_t)$ 也是双曲型算子. 若我们用 Ω_- 表示带形区域 $-b<t<0$, 则根据我们刚才证明的结论, 存在一个函数 $h\in S(\Omega_-)$, 在 $t=-b$ 附近等于零, 并且使得

$$P(D_x, -D_t)h(x, t)=g(x, -t), \quad -b<t<0$$

如果现在令 $w(x, t)=h(x, -t)$, 我们看到 w 具有所要求的性质. 这就完成了证明.

5-2 强解的性质

本节中我们将讨论方程(5-1), (5-2)的强解, 并给出它们的某些性质. 引进一族内积和范数将是方便的. 如同在 5-1 节中那样, 设 Ω 表示带形区域 $0<t<b$. 对于非负整数 r 和实数 s, 我们令

$$(u, v)_{r,s}=\sum_{k=0}^{r}\int_0^b (D_t^k u, D_t^k v)_{r-k+s}\,dt \tag{5-12}$$

其中$(\ ,\ )_s$表示由 2-3 节中等式(2-25)给出的关于 x 变量的内积. 相应的范数由

$$|u|_{r,s}^2=\sum_{k=0}^{r}\int_0^b |D_t^k u|_{r-k+s}^2\,dt \tag{5-13}$$

给出. 我们用 $H^{r,s}=H^{r,s}(\Omega)$表示 $S(\Omega)$关于范数(5-13)的完备化. 显然, 对于每个 $r, s, H^{r,s}$ 都是一个 Hilbert 空间, 而且 $H^{0,0}=L^2(\Omega)$. 我们记 $H^r=H^{r,0}$.

若 $u\in L^2(\Omega)$是方程(5-1), (5-2)的一个强解, 则在 $C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^m$ 中存在一个函数序列 $\{u_j\}$, 满足

$$D_t^k u_j(x, 0)=0, \quad 0\leqslant k<m \tag{5-14}$$

并且使得

$$u_j\to u, \ P(D)u_j\to f, \ \text{在 } L^2(\Omega)\text{中} \tag{5-15}$$

关于这个解我们还可以指出更多的东西．例如，我们有

定理 5-5 假定 $P(D)$是双曲型的．若 $\{u_j\}$ 是满足等式(5-14)的 $C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^{m,s}$ 中的一个函数序列，并使 $P(D)u_j$ 在 $H^{0,s}$ 中收敛，则对每个 k, $P^{(0,k)}(D)u_j$ 在 $H^{0,s}$ 中收敛．

记号见 4-3 节．定理 5-5 的证明依赖于不等式

$$\sum|P^{(0,k)}(D)u|_{0,s}\leqslant C|P(D)u|_{0,s} \tag{5-16}$$

此式对所有满足 (5-2) 的 $u\in C^m(\bar{\Omega})\cap H^{m,s}$ 都成立．我们将在 5-4 节中证明这个不等式．有一点点改变，描述如下．

设 $\tau_1(\xi)$, …, $\tau_m(\xi)$是 $P(\xi,\tau)=0$ 的根．

若 $J=(j_1,\cdots,j_k)$是整数集$(1,2,\cdots,m)$的任何子集，我们作 τ 的多项式

$$P_J(\xi,\tau)=(\tau-\tau_{j_1})\cdots(\tau-\tau_{j_m}) \tag{5-17}$$

注意 $P_J(\xi,\tau)$不一定要是ξ的多项式．然而，对于$u(x,t)\in C^\infty(\Omega)$，我们可以通过令

$$P_J(D)u=F^{-1}P_J(\xi,D_t)Fu \tag{5-18}$$

来定义 $P_J(D)u$，其中 F 是关于变量 x 的 Fourier 变换．若 $P_J(\xi,\tau)$碰巧是一个多项式，这就和 2-3 节由等式(2-22)，(2-23)给出的通常的定义一致．按照这种概念，我们有

定理 5-6 在定理 5-5 的假设下，对$(1,\cdots,m)$的每个子集 J，函数 $P_J(D)u_j$ 在 $H^{0,s}$ 中收敛．

对于函数 $u\in C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^{m,s}$，不等式

$$\sum_J|P_J(D)u|_{0,s}\leqslant C|P(D)u|_{0,s} \tag{5-19}$$

总是成立，且满足(5-2)．由此就可推得本定理．我们也将在 5-4 节中证明这个不等式．

设 A 是定义在 $C^\infty(\Omega)$上的一个算子，又设 u 是 $H^{r,s}$ 中的函数．我们将说 A 强作用于 u，如果存在一个 $f\in H^{r,s}$，使得

1．若 $\{v_k\}$ 是 $C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^{r,s}$ 中的一个函数序列，使得在 $H^{0,s}$ 中 $v_k\to u$, $Av_k\to g$, 则 $g=f$.

2．存在序列 $\{v_k\}$，使得在 $H^{r,s}$ 中确有 $v_k\to u$, $Av_k\to f$.

利用这个定义我们有

推论 5-7 若 $P(D)$ 是双曲型的，而 $u\in H^{0,s}$ 是方程 (5-1)，(5-2) 的强解，则对于每个 k 和 J，$P^{(0,k)}(D)$ 和 $P_J(D)$ 强作用于 u.

证明 从定理 5-5 和 5-6 就可以推出要求 2 得到满足，从 u 也是一个弱解这一事实就可以推出要求 1. 事实上设 $Q(D)$ 代表所提到的任何一个算子，并且假定 $\{v_k\}\subset C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^{0,s}$ 使得在 $H^{0,s}$ 中 $v_k\to u$，$Q(D)v_k\to g$. 若 ψ 是 $C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^{0,-s}$ 中的、在 $t=0$, b 附近等于零的任一函数，则

$$(v_k,\ \bar{Q}(D)\psi)=(Q(D)v_k,\ \psi) \tag{5-20}$$

这个等式是从 ψ 和每个 v_k 都是 $S(\Omega)$ 中函数在 $H^{0,s}$ 中的极限这一事实推得的. 当 $k\to\infty$ 时取极限，我们得到，对于所有这样的 ψ 有

$$(u,\ \bar{Q}(D)\psi)=(g,\ \psi)$$

现在，若存在另一个序列 $\{u_k\}\subset C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^{0,s}$，使得在 $H^{0,s}$ 中 $u_k\to u$，$Q(D)u_k\to f$，则对所有这样的 ψ 我们有

$$(f-g,\ \psi)=0 \tag{5-21}$$

设 w 是 $C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^{0,s}$ 中的任一函数，且令

$$w_0=F^{-1}(1+|\xi|)^{-s}Fw$$

其中 F 是关于 x 变量的 Fourier 变换，则 $w_0\in L^2(\Omega)$. 因此，在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中存在一个函数序列 $\{\varphi_k\}$，它在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到 w_0(4-6 节引理 4-17). 于是 $\varphi_{0k}=F^{-1}(1+|\xi|)^sF\varphi_k$ 属于 $C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^{0,-s}$，并且在 $t=0$, b 附近等于零. 因此

$$(f-g,\ \varphi_{0k})=0,\qquad k=1,\ 2,\ \cdots$$

但是 $\qquad |\varphi_{0k}-w|_{0,-s}=|\varphi_k-w_0|_{0,0}\to 0$，当 $k\to\infty$ 时

这就蕴含着

$$(f-g,\ w)=0 \tag{5-22}$$

因此，对于所有的 $w\in C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^{0,-s}$ 等式(5-22)成立. 其次，设 h 是 $C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^{0,s}$ 中的任一函数，且令

$$w=F^{-1}(1+|\xi|)^{2s}Fh$$

则 $w\in C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^{0,-s}$. 而且，由等式(5-22)，有

$$(f-g,\ h)_{0,s}=(f-g,\ w)_{0,0}=0$$

因此，对所有 $h\in C^{\infty}(\bar{\Omega})\cap H^{0,s}$ 有

$$(f-g,\ h)_{0,s}=0 \tag{5-23}$$

但是存在这样的一个函数序列 $\{h_k\}$，在 $H^{0,s}$ 中收敛到 $f-g$. 因此 $g=f$. 证毕.

5-3 一维情形的估计

本节中我们将推导几个非常有用的不等式，在证明定理 5-5 和 5-6 时将用到它们，以后在别处也将用到它们. 我们从考虑单变量 t 的函数开始.

引理 5-8 若 $u(t)$ 在 $[a,\ b]$ 中有连续导数，而 τ 是一复数，则

$$|u(b)|^2=|u(a)|^2-2\,\mathrm{Im}\,\tau\int_a^b|u|^2\,dt$$

$$+2\,\mathrm{Re}\,i\int_a^b\bar{u}(D_t-\tau)u\,dt \tag{5-24}$$

证明 我们有

$$\mathrm{Re}\,i\int_a^b\bar{u}(D_t-\tau)u\,dt=\mathrm{Re}\int_a^b\bar{u}\,\frac{du}{dt}\,dt-(\mathrm{Re}\,i\tau)\int_a^b|u|^2dt$$

$$=\frac{1}{2}[|u(b)|^2-|u(a)|^2]+\mathrm{Im}\,\tau\int_a^b|u|^2dt$$

这就给出了等式(5-24).

引理 5-9 假定 $r(t)$ 和 $\rho(t)$ 是 $[a,\ b]$ 中的可积函数，且有

$$r(t)\leqslant c\int_a^t r(s)ds+\rho(t),\quad a\leqslant t\leqslant b \tag{5-25}$$

其中 $c\geqslant 0$，则

$$r(t)\leqslant c\int_a^t e^{c(t-s)}\rho(s)ds+\rho(t),\quad a\leqslant t\leqslant b \tag{5-26}$$

若 $\rho(t)$ 是非减的，则 $r(t)\leqslant e^{c(t-a)}\rho(t)$.

证明 令

$$v(t)=e^{-ct}\int_a^t r(s)ds$$

则
$$v'(t)=-cv(t)+e^{-ct}r(t)$$

因此，不等式(5-25)说的就是

$$v'(t)\leqslant e^{-ct}\rho(t)$$

从 a 到 t 积分就给出

$$v(t)\leqslant\int_a^t e^{-cs}\rho(s)\,ds$$

将上式及本式代入 $v'(t)=-cv(t)+e^{-ct}r(t)$，我们得到(5-26). 立即得到第二个结论.

推论 5-10 若在(5-25)中

$$\rho(t)=\alpha+\int_a^t\sigma(s)\,ds$$

则

$$r(t)\leqslant\alpha e^{c(t-a)}+\int_a^t e^{c(t-s)}\sigma(s)\,ds \tag{5-27}$$

证明 我们有

$$ce^{ct}\int_a^t\int_a^s e^{-cs}\sigma(\lambda)\,d\lambda\,ds=ce^{ct}\int_a^t\sigma(\lambda)\int_\lambda^t e^{-cs}\,ds\,d\lambda$$
$$=e^{ct}\int_a^t(e^{-c\lambda}-e^{-ct})\sigma(\lambda)\,d\lambda$$

代入(5-26)即得

定理 5-11 若 $u(t)$ 在 $[a,\ b]$ 中有连续导数并且 $\operatorname{Im}\tau<0$，则

$$|u(b)|^2\leqslant e^{2|\operatorname{Im}\tau|(b-a)}|u(a)|^2+2\operatorname{Re}i\int_a^b e^{2|\operatorname{Im}\tau|(b-t)}\bar{u}(D_t-\tau)u\,dt \tag{5-28}$$

若 $\operatorname{Im}\tau\geqslant0$，我们有

$$|u(b)|^2\leqslant|u(a)|^2+2\operatorname{Re}i\int_a^b\bar{u}(D_t-\tau)u\,dt \tag{5-29}$$

证明 不等式(5-28)可从(5-27)得到，而(5-29)可从等式(5-24)得到.

推论 5-12 若 $\operatorname{Im}\tau<0$，则

$$|u(b)|^2\leqslant e^{(2|\operatorname{Im}\tau|+1)(b-a)}|u(a)|^2+\int_a^b e^{(2|\operatorname{Im}\tau|+1)(b-t)}|(D_t-\tau)u|^2\,dt \tag{5-30}$$

若 $\operatorname{Im}\tau\geqslant0$，则

$$|u(b)|^2 \leqslant e^{b-a}|u(a)|^2 + \int_a^b e^{b-t}|(D_t-\tau)u|^2 dt \tag{5-31}$$

证明　由等式(5–24)，我们有

$$|u(t)|^2 \leqslant |u(a)|^2 + c\int_a^t |u|^2 dt + \int_a^t |(D_t-\tau)u|^2 dt$$

其中 $c=2|\mathrm{Im}\,\tau|+1$, 或 $c=1$, 要看 $\mathrm{Im}\,\tau<0$ 还是 $\mathrm{Im}\,\tau\geqslant 0$ 而定.

其次，设 $P(\tau)$ 是一个 m 次多项式. 若 $\tau_1, \cdots, \tau_m$ 是其复根,

$$P(\tau) = a_0 \prod_{k=1}^{m} (\tau-\tau_k) \tag{5-32}$$

其中常数 $a_0 \neq 0$. 令

$$P_k(\tau) = \frac{P(\tau)}{(\tau-\tau_k)}, \ 1\leqslant k\leqslant m \tag{5-33}$$

$$P'(\tau) = \frac{dP(\tau)}{d\tau} \tag{5-34}$$

我们有

定理 5–13　若 $u(t)$ 在 $[a, b]$ 中有直到 m 阶的连续导数，则

$$|P_k(D_t)u(b)|^2 = 2\,\mathrm{Re}\, i\int_a^b P(D_t)u\overline{P_k(D_t)u}\,dt - 2\,\mathrm{Im}\,\tau_k\int_a^b |P_k(D_t)u|^2 dt + |P_k(D_t)u(a)|^2, \quad 1\leqslant k\leqslant m \tag{5-35}$$

并且

$$\sum_1^m |P_k(D_t)u(b)|^2 = 2\,\mathrm{Re}\, i\int_a^b P(D_t)u\overline{P'(D_t)u}\,dt - 2\sum_1^m \mathrm{Im}\,\tau_k\int_a^b |P_k(D)u|^2 dt + \sum_1^m |P_k(D_t)u(a)|^2 \tag{5-36}$$

证明　从等式(5–24)立即推得这些恒等式. 注意

$$P'(\tau) = \sum P_k(\tau)$$

定理 5–14　若 $u(t)$ 在 $[a, b]$ 中有直到 m 阶的连续导数，则

$$|P_k(D_t)u(b)|^2 \leqslant e^{2|\mathrm{Im}\,\tau_k|(b-a)}|P_k(D_t)u(a)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, i\int_a^b e^{2|\mathrm{Im}\,\tau_k|(b-t)}P(D_t)u\overline{P_k(D_t)u}\,dt, \quad 1\leqslant k\leqslant m \tag{5-37}$$

若

$$-\mathrm{Im}\,\tau_k \leqslant K > 0, \ 1\leqslant k\leqslant m \tag{5-38}$$

则

$$|P_k(D_t)u(b)|^2 \leqslant \int_a^b e^{(2K+1)(b-t)}|P(D_t)u|^2 dt$$

$$+e^{(2K+1)(b-a)}|P_k(D_t)u(a)|^2, \ 1 \leqslant k \leqslant m \tag{5-39}$$

证明　应用定理 5-11 和推论 5-12 即得.

推论 5-15　在同样的假设下,

$$|P'(D_t)u(b)|^2 \leqslant m \int_a^b e^{(2K+1)(b-t)}|P(D_t)u|^2 dt \tag{5-40}$$

其次,假定根 $\tau_1, \cdots, \tau_m$ 是 E^n 上的连续函数 $\tau_k(\xi)$,它们是互不相同的并且是一次齐次函数. 意思就是

$$\tau_j(\xi) \neq \tau_k(\xi), \ 1 \leqslant j < k \leqslant m, \ \xi \in E^n \tag{5-41}$$

而且

$$\tau_k(\lambda\xi) = \lambda\tau_k(\xi), \ \lambda > 0, \ \xi \in E^n \tag{5-42}$$

定理 5-16　在上述假定下,对于所有的 $u \in C^m[a, b]$,有

$$\sum_0^{m-1} |\xi|^{2(m-k-1)}|D_t^k u(t)|^2 \leqslant C\sum_0^{m-1} |\xi|^{2(m-k-1)}|D_t^k u(a)|^2$$

$$+C\,\mathrm{Re}\, i\sum_1^m \int_a^t e^{-2|\mathrm{Im}\,\tau_k|\lambda} P(D_t)u(\lambda)P_k(D_t)u(\lambda)d\lambda,$$

$$a \leqslant t \leqslant b \tag{5-43}$$

和

$$\sum_0^{m-1} |\xi|^{2(m-k-1)}|D_t^k u(t)|^2 \leqslant \sum_0^{m-1} |\xi|^{2(m-k-1)}|D_t^k u(a)|^2$$

$$+C\int_a^t |P(D_t)u(\lambda)|^2 d\lambda, \ a \leqslant t \leqslant b \tag{5-44}$$

在证明这个定理的时候,我们将利用

引理 5-17　假定数 $\tau_1, \cdots, \tau_m$ 是互不相同的,而且由等式 (5-33) 给出的多项式 $P_k(\tau)$ 的形式为

$$P_j(\tau) = \sum_0^{m-1} a_{jk}\tau^k, \ 1 \leqslant j \leqslant m \tag{5-45}$$

假定 $w_0, \cdots, w_{m-1}$ 是使得

$$\sum_0^m a_{jk}w_k = 0, \ 1 \leqslant j \leqslant m \tag{5-46}$$

的复数. 于是 $w_0 = \cdots = w_{m-1} = 0$.

证明　设 $b_0, \cdots, b_{m-1}$ 是任何数,且令

$$R(\tau)=\sum_0^{m-1} b_k\tau^k \tag{5-47}$$

由部分分式

$$\frac{R(\tau)}{P(\tau)}=\sum_1^m \frac{c_k}{\tau-\tau_k}$$

其中 $c_k=R(\tau_k)/P_k(\tau_k)$. 因此

$$R(\tau)=\sum c_jP_j(\tau) \tag{5-48}$$

从等式(5-45), (5-47)和(5-48), 我们知道

$$b_k=\sum_0^{m-1} c_ja_{jk},\ \ 0\leqslant k\leqslant m$$

因此, 由等式(5-46), 有

$$\sum b_kw_k=\sum c_ja_{jk}w_k=0$$

因为 b_k 是任意的, 我们就证明了所有的 w_k 等于零.

定理 5-16 的证明　令

$$w_k=\frac{D^k_tu(t)}{|\xi|^k},\ 0\leqslant k<m \tag{5-49}$$

并考虑表达式

$$G(\xi,\ w)=\frac{|\xi|^{2m-2}\sum|w_k|^2}{\sum_j\left|\sum_k a_{jk}(\xi)|\xi|^kw_k\right|^2} \tag{5-50}$$

其中 $a_{jk}(\xi)$ 是 $P_j(\tau)$ 的系数. 由等式(5-42), $a_{jk}(\xi)$ 是 $m-k-1$ 次齐次函数. 由引理 5-17, 除非 w_k 都等于零, $G(\xi,\ w)$的分母不等于零. 因此, $G(\xi,\ w)$是集合$|\xi|=|w_0|^2+\cdots+|w_{m-1}|^2=1$上的连续函数(注意 ξ 的分量是实数而 w_k 是复数). 因为这个集合是闭的、有界的, 所以它是紧集. 因为 $G(\xi,\ w)$在这个紧集上是连续的, 所以它在该集合上是有界的. 因此在该集合上

$$G(\xi,\ w)\leqslant M \tag{5-51}$$

其次, 注意到等式(5-50)的分子、分母都是 ξ 的 $2m-2$ 次齐次函数, 又是 w_k 的二次齐次函数. 所以, 由此推出: 对于所有的 ξ 和 w, 只要 $\xi\neq0$ 以及 w_k 不全等于零, 则(5-51)成立. 由于等式(5-49), 这就给出了

$$\sum_k|\xi|^{2(m-k-1)}|D_tu(t)|^2\leqslant M\sum_j|P_j(D_t)u(t)|^2 \tag{5-52}$$

因为 $a_{jk}(\xi)$ 是 $m-k-1$ 次齐次函数，相反的不等式可立即得到. 如果我们现在把这些不等式应用到不等式(5-37)和(5-39)上去，就分别得到(5-43)和(5-44). 这就完成了证明.

推论 5-18 在定理 5-16 的假设下，对所有的 $u\in C^m[a, b]$ 有

$$\sum_0^{m-1}(1+|\xi|)^{2(m-k-1)}|D_t^k u(t)|^2\leqslant C\sum_0^{m-1}|\xi|^{2(m-k-1)}|D_t^k u(a)|^2$$
$$+C\operatorname{Re} i\sum_1^m\int_a^t e^{N(t-\lambda)-2|\operatorname{Im}\tau_k|\lambda}P(D_t)u(\lambda)P_k(D_t)u(\lambda)d\lambda,$$
$$a\leqslant t\leqslant b \tag{5-53}$$

和

$$\sum_0^{m-1}(1+|\xi|)^{2(m-k-1)}|D_t^k u(t)|^2$$
$$\leqslant C\sum_0^{m-1}(1+|\xi|)^{2(m-k-1)}|D_t^k u(a)|^2$$
$$+C\int_a^t|P(D_t)u(\lambda)|^2d\lambda,\ a<t\leqslant b \tag{5-54}$$

证明 我们把 2-4 节的不等式(2-45)应用到不等式(5-43)上去. 这就给出

$$\sum_0^{m-1}(1+|\xi|)^{2(m-k-1)}|D_t^k u(t)|^2$$
$$\leqslant C\sum_0^{m-1}|\xi|^{2(m-k-1)}|D_t^k u(a)|^2+C'\sum_0^{m-2}|D_t^k u(t)|^2$$
$$+C\operatorname{Re} i\int_a^t\sum_1^m e^{-2|\operatorname{Im}\tau_k|\lambda}P(D_t)u(\lambda)\,\overline{P_k(D_t)u(\lambda)}d\lambda \tag{5-55}$$

现在 $$|D_t^k u(t)|\leqslant\int_a^t|D_t^{k+1}u(\lambda)|d\lambda$$

由此 $$\sum_0^{m-2}|D_t^k u(t)|^2\leqslant(b-a)\int_a^t\sum_1^{m-1}|D_t^k u(\lambda)|^2d\lambda$$

因此，若我们令 $r(t)$ 表示(5-53)的左端，则有

$$r(t)\leqslant N\int_a^t r(\lambda)d\lambda+C\sum_0^{m-1}|\xi|^{2(m-k-1)}|D_t^k u(a)|^2$$
$$+C\operatorname{Re} i\int_a^t\sum_1^m e^{-2|\operatorname{Im}\tau_k|\lambda}P(D_t)u(\lambda)P_k(D_t)u(\lambda)d\lambda$$

若我们现在应用推论 5-10，即可得到

$$r(t) \leqslant Ce^{N(t-a)} \sum_{0}^{m-1} |\xi|^{2(m-k-1)} |D_t^k u(a)|^2$$

$$+ C \operatorname{Re} i \int_a^t \sum_{1}^{m} e^{N(t-\lambda)-2|\operatorname{Im}\tau_k|\lambda} P(D_t) u(\lambda) \overline{P_k(D_t) u(\lambda)} d\lambda$$

这就给出了(5-53). 为了证明(5-54), 注意

$$\left| \int_a^t e^{-Nt-2|\operatorname{Im}\tau_j|\lambda} P(D_t) u(\lambda) P_j(D_t) u(\lambda) d\lambda \right|$$

$$\leqslant \int_a^t |P(D_t) u(\lambda)|^2 d\lambda + K \sum_{0}^{m-1} |\xi|^{2(m-k-1)} \int_a^t |D_t^k u(\lambda)|^2 d\lambda \tag{5-56}$$

因此

$$r(t) \leqslant CK \int_a^t r(\lambda) d\lambda + C \int_a^t |P(D_t) u(\lambda)|^2 d\lambda$$

$$+ C \sum_{0}^{m-1} |\xi|^{2(m-k-1)} |D_t^k u(a)|^2$$

再应用一次推论 5-10, 即给出不等式(5-54). 这就完成了证明.

5-4 $n+1$ 维情形的估计

现在我们回到 5-2 节的情形. 特别是, Ω 是 E^{n+1} 中的带状区域 $0<t<b$ 的情形. 作为等式(5-12)的一个修正, 我们写出

$$(u, v)_{r,s}^{(a)} = \sum_{k=0}^{r} \int (1+|\xi|)^{2(r-k+s)} D_t^k F u(\xi, a) D_t^k F v(\xi, a) d\xi,$$

$$0 \leqslant a \leqslant b \tag{5-57}$$

和

$$(u, v)_{r,s}^{(a,c)} = \int_a^c (u, v)_{r,s}^{(t)} dt, \ 0 \leqslant a < c \leqslant b \tag{5-58}$$

相应的范数分别用 $|u|_{r,s}^{(a)}$ 和 $|u|_{r,s}^{(a,c)}$ 来表示. 用 5-2 节的记号, 我们有

$$(u, v)_{r,s} = (u, v)_{r,s}^{(0,b)}, \ |u|_{r,s} = |u|_{r,s}^{(0,b)} \tag{5-59}$$

注意到

$$(u, v)_{r-1,s+1}^{(a)} + (D_t^r u, D_t^r v)_{0,s}^{(a)} = (u, v)_{r,s}^{(a)} \tag{5-60}$$

对于内积(5-58)也有类似的结果. 特别, 我们有

$$|u|^{(a)}_{r-1,s+1}\leqslant|u|^{(a)}_{r,s} \tag{5-61}$$

这个不等式意味着 $H^{r,s}\subset H^{r-1,s+1}$. 我们首先考虑下面的定理.

定理 5-19 若 $P(D)$是双曲型的,则对于所有的 $u\in C^m(\overline{\Omega})$

$$|P_k(D)u|^{(t)}_{0,s}\leqslant C|P_k(D)u|^{(0)}_{0,s}+C|P(D)u|^{(0,t)}_{0,s},$$
$$0<t\leqslant b,\ 1\leqslant k\leqslant m \tag{5-62}$$

成立,其中常数 C 只依赖于 b 和 4-3 节(4-31)中的双曲性常数 K.

证明　由(5-39),我们有

$$|P_k(\xi,\ D_t)Fu(\xi,\ t)|^2$$
$$\leqslant C\int_0^t|P(\xi,\ D_t)Fu(\xi,\ \lambda)|^2d\lambda+C|P_k(\xi,\ D_t)Fu(\xi,\ 0)|^2 \tag{5-63}$$

若我们将两边同乘以$(1+|\xi|^2)^{2s}$并且对 ξ 积分, 就得到(5-62).

现在我们就能给出定理 5-5 和 5-6 的证明了. 我们先给出

定理 5-6 的证明　设 J_k 是集合$(1,\cdots,m)$中去掉 k 所得的集合[译者注: 即$(1,\cdots,k-1,\ k+1,\cdots,m)$],则 P_{J_k} 正好是由等式(5-33)给出的 P_k(当然现在 P_{J_k} 也依赖于 ξ). 由(5-62), 对于满足等式(5-2)的所有的 $u\in C^m(\overline{\Omega})\cap H^{m,s}$,我们有

$$|P_k(D)u|^{(t)}_{0,s}\leqslant C|P(D)u|^{(0,b)}_{0,s},\ 0<t\leqslant b \tag{5-64}$$

如果我们取(5-64)的两边的平方并对 t 积分, 则对于 $J=J_k$ 得到(5-19). 其次,我们注意到 P_k 具有 P 的所有性质(除了 P_k 可能不是ξ 的多项式外). 而且,包含 $m-2$ 个数的任何 J 都可以从某个 J_k 中去掉一个数而得到. 因此,对于这样一种 J 的每个 P_J 都可以从某个 P_k 得到,其方法与从 P 得到 P_k 的方法一样. 因此重复应用(5-64)就可以得到(5-19). 这就完成了证明.

定理 5-5 的证明　我们只是指出 $P^{(0,k)}(D)$是所有那些恰好包含 k 个数的 J 所对应的 $P_J(D)$的和. 因此从(5-19)就推出(5-16).

回忆一下, 齐次算子 $P(D)$ 被称为全双曲型的, 如果对每个 $\xi\neq0$, $p(\xi,\ \tau)$有 m 个实的单根(见 4-4 节). 利用 5-3 节的结果, 我们有

定理 5-20 若 $p(D)$ 是一个 m 阶全双曲型算子，则存在常数 C, N, 使得对所有的 $u\in C^m(\overline{\Omega})$

$$[|u|^{(t)}_{m-1,s}]^2\leqslant C\,\mathrm{Re}\,i(gp(D)u,\ p^{(0,1)}(D)u)^{(0,t)}_{0,s}+[|u|^{(0)}_{m-1,s}]^2,$$

$$0<t\leqslant b \tag{5-65}$$

成立,其中

$$g=e^{N(t-\lambda)} \tag{5-66}$$

证明　我们利用不等式(5-53). 因为 $p(\xi,\ \tau)$ 的根是互不相同的并且是实的，所以可以应用推论 5-18.（注意根据 4-4 节的引理 4-14, 这些根是连续的.）因为 $p^{(0,1)}=\sum p_k$, 我们有

$$\sum_0^{m-1}(1+|\xi|)^{2(m-k-1)}|D_t^kFu(\xi,\ t)|^2$$

$$\leqslant C\sum_0^{m-1}|\xi|^{2(m-k-1)}|D_t^kFu(\xi,\ 0)|^2$$

$$+C\,\mathrm{Re}\,i\int_0^t e^{N(t-\lambda)}p(\xi,\ D_t)Fu(\xi,\ \lambda)$$

$$\times\overline{p^{(0,1)}(\xi,\ D_t)Fu(\xi,\ \lambda)}\,d\lambda \tag{5-67}$$

若乘以 $(1+|\xi|)^{2s}$ 并对 ξ 积分,我们则得到(5-65).

定理 5-21 设 $p(D)$ 是一个 m 阶全双曲型算子,又设 $Q(D)$ 是任何阶数 $<m$ 的算子. 令 $P(D)=p(D)+Q(D)$, 则 $P(D)$ 是双曲型的,并且存在常数 C, N, 使得对所有的 $u\in C^m(\overline{\Omega})$ 有

$$[|u|^{(t)}_{m-1,s}]^2\leqslant C\,\mathrm{Re}\,i(gP(D)u,\ p^{(0,1)}(D)u)^{(0,t)}_{0,s}+[|u|^{(0)}_{m-1,s}]^2,$$

$$0<t\leqslant b \tag{5-68}$$

其中 g 之形状就是(5-66).

证明　$P(D)$ 是双曲型算子这一点早就证明了(4-4 节的定理 4-10). 为了证明不等式(5-68),我们利用(5-65). 因为 $Q(D)$ 和 $p^{(0,1)}(D)$ 的阶数都 $<m$, 所以存在常数 M, 使得

$$|(gQ(D)u,\ p^{(0,1)}(D)u)^{(0,t)}_{0,s}|\leqslant M[|u|^{(0,t)}_{m-1,s}]^2$$

$$=M\int_0^t[|u|^{(0,\lambda)}_{m-1,s}]^2\,d\lambda \tag{5-69}$$

因此,如果我们令 $r(t)=(|u|^{(t)}_{m-1,s})^2$, 根据(5-65), 我们有

$$r(t)\leqslant CM\int_0^t r(\lambda)\,d\lambda+\mathrm{Re}\,i(gP(D)u,p^{(0,1)}(D)u)^{(0,t)}_{0,s}+Cr(0),$$

$$0<t\leqslant b$$

如果现在应用推论 5-10，我们就得到(5-68)。

推论 5-22 在同样的假设下，

$$|u|_{m-1,s}^{(t)} \leqslant C(|P(D)u|_{0,s}^{(0,t)} + |u|_{m-1,s}^{(0)}),\ 0<t\leqslant b,\ u\in C^m(\overline{\Omega}) \tag{5-70}$$

证明 注意到对于任何 $\varepsilon>0$ 存在常数 C'，使得

$$|(gP(D)u,\ p^{(0,1)}(D)u)_{0,s}^{(0,t)}| \leqslant C'[|P(D)u|_{0,s}^{(0,t)}]^2 + \varepsilon[|u|_{m-1,s}^{(0,s)}]^2 \tag{5-71}$$

如果把这个不等式和(5-68)结合起来，我们就得到(5-70)。

推论 5-23 在同样的假设下，

$$|u|_{m,s-1}^{(0,t)} \leqslant C(|P(D)u|_{0,s}^{(0,t)} + |u|_{m-1,s}^{(0)}),\ 0<t\leqslant b,\ u\in C^m(\overline{\Omega}) \tag{5-72}$$

证明 由(5-70)，对于 $0\leqslant\lambda\leqslant t$，我们有

$$\begin{aligned}|u|_{m-1,s}^{(\lambda)} &\leqslant C(|P(D)u|_{0,s}^{(0,\lambda)} + |u|_{m-1,s}^{(0)})\\ &\leqslant C(|P(D)u|_{0,s}^{(0,t)} + |u|_{m-1,s}^{(0)})\end{aligned}$$

对 λ 积分我们得到

$$|u|_{m-1,s}^{(0,t)} \leqslant C(|P(D)u|_{0,s}^{(0,t)} + |u|_{m-1,s}^{(0)}) \tag{5-73}$$

因为在 $P(D)$ 中 D_t^m 的系数不等于零，我们还有

$$|D_t^m u|_{0,s-1}^{(0,t)} \leqslant C(|P(D)u|_{0,s-1}^{(0,t)} + |u|_{m-1,s}^{(0,t)}) \tag{5-74}$$

因为

$$[|u|_{m,s-1}^{(0,t)}]^2 = [|u|_{m-1,s}^{(0,t)}]^2 + [|D_t^m u|_{0,s-1}^{(0,t)}]^2 \tag{5-75}$$

(参看等式(5-60))，从(5-73)和(5-74)推得不等式(5-72)。

定理 5-24 对每个整数 $k\geqslant0$，存在一个与 s 无关的常数 C，使得

$$|u|_{m+k,s-1}^{(0,t)} \leqslant C(|P(D)u|_{k,s}^{(0,t)} + |u|_{m-1,s+k}^{(0)})$$
$$0<t\leqslant b,\ u\in C^{m+k}(\overline{\Omega}) \tag{5-76}$$

证明 我们利用归纳法. 假定(5-76)对 k 成立. 则(5-61)给出

$$\begin{aligned}|u|_{m+k,s}^{(0,t)} &\leqslant C(|P(D)u|_{k,s+1}^{(0,t)} + |u|_{m-1,s+k+1}^{(0)})\\ &\leqslant C(|P(D)u|_{k+1,s}^{(0,t)} + |u|_{m-1,s+k+1}^{(0)})\end{aligned} \tag{5-77}$$

而且，存在一个与 s 无关的常数 K，使得

$$\begin{aligned}|D_t^{m+k}u|_{0,s}^{(0,t)} &\leqslant |D_t^k P(D)u|_{0,s}^{(0,t)} + K|u|_{m+k-1,s+1}^{(0,t)}\\ &\leqslant |P(D)u|_{k,s}^{(0,t)} + K|u|_{m+k,s}^{(0,t)}\end{aligned} \tag{5-78}$$

如果我们现在把(5-75)应用到(5-77)和(5-78)上去，则对 $k+1$ 我们得到(5-76). 由于推论 5-23, 当 $k=0$ 时(5-76)成立. 因此对所有的 k, (5-76) 都成立.

5-5 存在定理

现在我们来说明怎样用前节的估计来给出双曲型方程 Cauchy 问题的各种存在定理. 首先，我们有

定理 5-25 设 f 是 $S(\Omega)$ 中的函数，又设 $g_0(x)$, …, $g_{m-1}(x)$ 是 $S(E^n)$ 中的函数. 若 $P(D)$ 是一个 m 阶双曲型算子，则存在函数 $u\in S(\Omega)$，使得

$$P(D)u=f, \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{5-79}$$

$$D_t^k u(x, 0)=g_k(x), \ x\in E^n \tag{5-80}$$

若 $P(D)$ 是全双曲型算子，则

$$|u|_{m-1,s}^{(t)}\leqslant C\Big(|f|_{0,s}^{(0,t)}+\sum_0^{m-1}|g_k|_{0,m-k+s-1}^{(0)}\Big), \ 0<t\leqslant b \tag{5-81}$$

其中常数 C 只依赖于 $P(D)$ 和 b.

证明 我们紧紧地追随 4-6 节的定理 4-15 的证明. 按 4-5 节，对于每个 $\xi\in E^n$, 问题

$$P(\xi, D_t)h(\xi, t)=Ff(\xi, t), \ t\geqslant 0 \tag{5-82}$$

$$D_t^k h(\xi, 0)=Fg_k(\xi), \ 0\leqslant k<m \tag{5-83}$$

有一个解 $h(\xi, t)$. 从 4-5 节中给出的 $h(\xi, t)$ 的公式，我们知道 $h(\xi, t)$ 是属于 $S(\Omega)$ 中的. 因此，$u(x, t)=F^{-1}h$ 属于 $S(\Omega)$. 把逆 Fourier 变换应用到方程(5-82), (5-83)上去，我们看到 u 是方程(5-79), (5-80)的解. 从推论 5-22 推得不等式(5-81).

定理 5-26 在同样的假设下，对于每个整数 $r\geqslant 0$

$$|u|_{m+r,s-1}^{(0,t)}\leqslant C\Big(|f|_{r,s}^{(0,t)}+\sum_0^{m-1}|g_k|_{0,m+r-k+s-1}^{(0)}\Big), \ 0<t\leqslant b \tag{5-84}$$

其中常数 C 只依赖于 $P(D)$, b 和 r.

推论 5-27 在定理 5-25 的假设下，若 f 的支集是有界集，并且该

支集与 $t=0$ 有一个正距离，则存在一个函数 $u\in S(\Omega)$ 也有此性质并且使 $P(D)u=f$. 类似地，若 f 的支集与 $t=b$ 有正距离，则存在一个函数 $v\in S(\Omega)$，使得 $P(D)v=f$，而且 v 的支集与 $t=b$ 有正距离.

推论 5-27 的证明类似于定理 5-4 的证明，因而省略.

设 r 是一 $\geqslant 0$ 的整数. 若 f 是 $H^{r,s}$ 中的函数，我们将把一个函数 $u\in H^{r,s}$ 叫做方程(5-1)，(5-2)的强解，如果在 $S(\Omega)$ 中存在一个满足等式(5-14)的函数序列 $\{u_j\}$，并使

$$u_j\to u,\ P(D)u_j\to f,\ \text{在}\ H^{r,s}\ \text{中} \tag{5-85}$$

用这种术语，我们有

定理 5-28 若 $P(D)$ 是 m 阶全双曲型算子而 $f\in H^{r,s}$，则方程(5-1)，(5-2)有一强解 $u\in H^{m+r,s-1}$，满足

$$|u|_{m+r,s-1}\leqslant C|f|_{r,s} \tag{5-86}$$

其中常数 C 只依赖于 $P(D)$，b 和 r.

证明　因为 $f\in H^{r,s}$，在 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 中有一个函数序列 $\{f_j\}$，它们对 t 一致地属于 $S(E^n)$，并且在 $H^{r,s}$ 中收敛到 f(这仅仅是 $H^{r,s}$ 的定义). 而且，存在对 t 一致地属于 $S(E^n)$ 的函数 $u_j\in C^\infty(\overline{\Omega})$，并且 u_j 满足(5-14)和

$$P(D)u_j=f_j,\ \text{在}\ \Omega\ \text{中},\ j=1,\ 2,\cdots \tag{5-87}$$

(定理 5-25). 由不等式(5-84)

$$|u_j-u_k|_{m+r,s-1}\leqslant C|f_j-f_k|_{r,s}\to 0,\ \text{当}\ j,\ k\to\infty\ \text{时}$$

因此，存在函数 $u\in H^{m+r,s-1}\subset H^{r,s}$，使得在 $H^{m+r,s-1}$ 中 $u_j\to u$. 特别是(5-85)成立. 因此 u 是方程(5-1)，(5-2)的一个强解.

证毕.

在证明下一个定理时，我们将利用

引理 5-29 $S(\Omega)$ 中在 $t=0$, b 附近等于0的函数构成的集合，对于每个实数 s 而言，在 $H^{0,s}$ 中是稠密的.

证明　只要证明对每个 $\varepsilon>0$ 和每个 $v\in S(\Omega)$，存在另一个函数 $w\in S(\Omega)$，w 在 $t=0$, b 附近等于零，并使得

$$|v-w|_{0,s}<\varepsilon \tag{5-88}$$

设给定$\delta>0$, 又设$\rho(t)$是$C_0^\infty[0, b]$中的一个函数, 使得

$$0\leqslant\rho(t)\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant b$$
$$\rho(t)=1,\ \delta\leqslant t\leqslant b-\delta$$

则$v\rho$属于$S(\Omega)$, 并且在$t=0$, b附近等于零. 而且

$$|v\rho-v|_{r,s}^2=\int_0^b(\rho-1)^2\int(1+|\xi|)^{2s}|Fv|^2 d\xi\, dt$$
$$\leqslant\int_0^\delta+\int_{b-\delta}^b\left[\int(1+|\xi|)^{2s}|Fv|^2 d\xi\right]dt\to 0,\ \text{当 } \delta\to 0 \text{ 时}$$

因此对于充分小的δ我们可以取$w=v\rho$. 证毕.

现在我们用S_a表示$S(\Omega)$中在带形区域$a\leqslant t\leqslant b$中等于零的函数构成的集合.

定理 5-30 若$P(D)$是全双曲型算子, 则存在一个只依赖于$P(D)$和b的常数C_0, 使得对于所有$S(\Omega)$中在$t=0$附近等于零的v,

$$|v|_{0,a}^{(a)}\leqslant C_0\operatorname*{lub}_{\psi\in S_a}\frac{|P(D)v,\ \psi)_{0,s}|}{|\psi|_{m-1,s}} \tag{5-89}$$

成立.

证明 设v是这样的一个函数, 又设g是使(5-68)成立的形为(5-66)的函数. 按照前述引理, 存在S_a中的一个函数序列$\{\varphi_k\}$, 使得

$$|\varphi_k-gv|_{0,s+1}^{(0,a)}\to 0,\ \text{当 } k\to\infty \text{ 时} \tag{5-90}$$

因为对于每个ξ, $p(\xi,\tau)$有m个不同的实根, 所以$p^{(0,1)}(\xi,\ \tau)$一定有$m-1$个不同的实根. 因此, 算子$p^{(0,1)}(D)$是$m-1$阶全双曲型算子. 于是, 由推论 5-27, 存在$\psi_k\in S_a$, 使得

$$p^{(0,1)}(D)\psi_k=\varphi_k,\ k=1,2,\cdots \tag{5-91}$$

同理, 存在一个在$t=0$附近等于零的$h\in S(\Omega)$, 满足

$$p^{(0,1)}(D)h=v \tag{5-92}$$

现在

$$\begin{aligned}(P(D)v,\psi_k)_{0,s}&=(P(D)p^{(0,1)}(D)h,\ \psi_k)_{0,s}\\&=(P(D)h,\ p^{(0,1)}(D)\psi_k)_{0,s}\to(P(D)h,\ gv)_{0,s}^{(0,a)}\\&=(gP(D)h,p^{(0,1)}(D)h)_{0,s}^{(0,a)},\ \text{当 } k\to\infty \text{ 时}\end{aligned} \tag{5-93}$$

我们可以分部积分并且不出现边界积分项，因为 h 在 $t=0$ 附近等于零，而每个 ψ_k 在 $t=b$ 附近等于零. 注意，$p^{(0,1)}(D)$ 的系数是实的. 由(5-68)，我们有

$$\liminf|(P(D)v,\psi_k)_{0,s}|\geqslant\frac{[|h|_{m-1,s}^{(0,a)}]^2}{C} \tag{5-94}$$

令 $w_k=\psi_k-gh$. 于是

$$p^{(0,1)}(D)w_k=\varphi_k-gv-\sum_{j>0}\frac{p^{(0,j+1)}(D)hD_t^jg}{j!}$$

因此

$$|p^{(0,1)}(D)w_k|_{0,s+1}^{(0,a)}\leqslant|\varphi_k-gv|_{0,s+1}^{(0,a)}+C\sum_{j>1}|p^{(0,j)}(D)h|_{0,s+1}^{(0,a)} \tag{5-95}$$

由引理 5-23（向后用）

$$|w_k|_{m-1,s}^{(0,a)}\leqslant C(|p^{(0,1)}(D)w_k|_{0,s+1}^{(0,a)}+|gh|_{m-2,s+1}^{(a)}) \tag{5-96}$$

因为当 $t=a$ 时 ψ_k 等于零. 从(5-90)，(5-95)和(5-96)得知存在常数 C，使得

$$\limsup|\psi_k|_{m-1,s}\leqslant C(|h|_{m-2,s+1}^{(0,a)}+|h|_{m-2,s+1}^{(a)}) \tag{5-97}$$

设 $\rho(a)$ 表示(5-89)的右端. 显然，$\rho(a)$ 是 a 的一个非减函数. 而且，从(5-94)和(5-97)得到

$$[|h|_{m-1,s}^{(a)}]^2\leqslant C\rho(a)(|h|_{m-1,s}^{(0,a)}+|h|_{m-1,s}^{(a)}),\ 0<a\leqslant b$$

（我们已经用了(5-61)）. 如果我们令

$$r(t)=|h|_{m-1,s}^{(t)} \tag{5-98}$$

这就变成

$$r(t)^2\leqslant C\rho(t)\left[\left(\int_0^t r(\lambda)^2d\lambda\right)^{1/2}+r(t)\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}C^2\rho(t)^2+\frac{1}{2}\int_0^t r(\lambda)^2d\lambda+\frac{1}{2}C^2\rho(t)^2+\frac{1}{2}r(t)^2,$$

$$0<t\leqslant b$$

因此 $$r(t)^2\leqslant 2C^2\rho(t)^2+\int_0^t r(\lambda)^2d\lambda,\ 0<t\leqslant b$$

如果现在我们应用引理 5-9 中的第二个结论，我们得到

$$r(t)^2\leqslant 2C^2e^t\rho(t)^2,\ 0<t\leqslant b \tag{5-99}$$

这正是我们要证明的. 证毕.

定理 5-31 若 $P(D)$ 是全双曲型的, 则对于所有的 $v\in H^{0,s}$

$$|v|_{0,s}^{(a)}\leqslant C_0 \operatorname*{lub}_{\psi\in S_a}\frac{|(v,\ \bar{P}(D)\psi)_{0,s}|}{|\psi|_{m-1,s}} \tag{5-100}$$

成立, 其中 C_0 是 (5-89) 中的常数.

证明 设 $\rho(t)$ 是 $C_0^\infty[-1,\ 1]$ 中一个非负函数, 它满足

$$\rho(t)>0,\ |t|<\frac{1}{2}$$

而

$$\int\rho(t)dt=1$$

设 $j(x)$ 是 1-3 节中由等式 (1-35) 给出的函数, 它满足

$$\int j(x)dx=1$$

对于 $v\in H^{r,s}$, 定义 v 在 Ω 外为零, 并且对 $\varepsilon>0$ 令

$$\tilde{J}_\varepsilon v=\frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\iint\rho\left(\frac{\tau-t+2\varepsilon}{\varepsilon}\right)j\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)v(y,\ \tau)dy\,d\tau \tag{5-101}$$

以及

$$\hat{J}_\varepsilon v=\frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\iint\rho\left(\frac{t-\tau+2\varepsilon}{\varepsilon}\right)j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)v(y,\ \tau)dy\,d\tau \tag{5-102}$$

容易验证对于每个 $\varepsilon>0$, $\tilde{J}_\varepsilon v$ 和 $\hat{J}_\varepsilon v$ 都属于 $C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^{r,s}$, $\tilde{J}_\varepsilon v$ 在 $t=0$ 附近等于零而 $\hat{J}_\varepsilon v$ 在 $t=b$ 附近等于零. 而且, 有

$$|\tilde{J}_\varepsilon v|_{r,s}\leqslant|v|_{r,s},\quad |\hat{J}_\varepsilon v|_{r,s}\leqslant|v|_{r,s} \tag{5-103}$$

$$|v-\tilde{J}_\varepsilon v|_{r,s}^{(a)}\to 0,\quad |v-\hat{J}_\varepsilon v|_{r,s}^{(a)}\to 0 \tag{5-104}$$

这些事实的证明与 2-5 节 (2-63) 和 (2-64) 的证明相类似. 我们还有

$$(\tilde{J}_\varepsilon v,\ w)_{0,s}=(v,\ \hat{J}_\varepsilon w)_{0,s},\qquad v,w\in H^{0,s} \tag{5-105}$$

这是容易验证的. 现在, 若 $v\in H^{0,s}$, 则对于每个 $\varepsilon>0$, $\tilde{J}_\varepsilon v$ 属于 $S(\Omega)$ 并且在 $t=0$ 附近等于零. 因此, 我们可以应用定理 5-30 而得到

$$|\tilde{J}_\varepsilon v|_{0,s}^{(a)}\leqslant C_0 \operatorname*{lub}_{\psi\in S_a}\frac{|(P(D)\tilde{J}_\varepsilon v,\ \psi)_{0,s}|}{|\psi|_{m-1,s}}$$

现在当 ψ 属于 S_a 时, $\hat{J}_\varepsilon\psi$ 也属于 S_a. 因此, 由 (5-103) 和 (5-105)

$$|\hat{J}_\varepsilon v|_{0,s}^{(a)} \leqslant C_0 \operatorname*{lub}_{\psi \in S_a} \frac{|(v, \bar{P}(D)\hat{J}_\varepsilon \psi)_{0,s}|}{|\hat{J}_\varepsilon \psi|_{m-1,s}}$$

$$\leqslant C_0 \operatorname*{lub}_{\psi \in S_a} \frac{|(v, \bar{P}(D)\psi)_{0,s}|}{|\psi|_{m-1,s}}$$

于是从(5-104)就得到不等式(5-100)．这就完成了证明．

5-3 到 5-5 节的材料是属于 Leray (1954)的(参看 Gårding, 1956)．

5-6 纯双曲型算子

设 $p(D)$是一个m阶齐次双曲型算子．因此对于每个$\xi \in E^n$, $p(\xi, \tau)$只有实根．由初等微积分，我们知道$p(\xi, \tau)$关于τ的导数一定有实根．我们令

$$p^{(0,k)}(\xi, \tau) = a \prod_{j=1}^{m-k} (\tau - \tau_{kj}(\xi)), \ k = 0, 1, \cdots \tag{5-106}$$

其中 $\tau_{kj}(\xi)$是连续，实值函数，而 a 是一个 $\neq 0$ 的常数．特别是，每个算子 $p^{(0,k)}(D)$ 都是双曲型算子．设 J 是整数$(1, \cdots, m)$的一个子集．如果 J 中的每个整数 $\leqslant m-k$, 则我们令

$$p_{k,J}(\xi, \tau) = a \prod_{j \in J} (\tau - \tau_{kj}(\xi)), \ k = 0, 1, \cdots \tag{5-107}$$

否则令 $p_{k,J}(\xi, \tau) = 0$．设 $Q(D)$是一个阶数 $< m$ 的算子，又令 $P(D) = p(D) + Q(D)$．如果存在有界函数 $c_{k,J}(\xi)$, 使得

$$Q(\xi, \tau) = \sum_{k,J} c_{k,J}(\xi) p_{k,J}(\xi, \tau) \tag{5-108}$$

则我们将把 $P(D)$称为纯双曲型的．

这个定义的理由是

定理 5-32 存在一个只依赖于 $p(D)$ 和 b 的常数 C, 使得对于所有满足等式(5-2)的 $u \in C^m(\bar{\Omega}) \cap H^{0,s}$ 有

$$\sum_{k,J} |p_{k,J}(D)u|_{0,s}^{(t)} \leqslant C |p(D)u|_{0,s}^{(0,t)}, \ 0 < t \leqslant b \tag{5-109}$$

从定理 5-19 和算子 $p^{(0,k)}$ 是双曲型算子这一事实推得这个定理．从定理 5-32, 我们有

定理 5-33 若 $P(D)$ 是纯双曲型的，则存在只依赖于 $P(D)$ 和 b 的常数 C，使得对于所有满足等式(5-2)的 $u\in C^m(\overline{\Omega})\cap H^{0,s}$，

$$\sum_{k,j}|p_{k,j}(D)u|_{0,s}^{(t)}\leqslant C|P(D)u|_{0,s}^{(0,t)},\ 0<t\leqslant b \qquad (5\text{-}110)$$

成立.

证明　由等式(5-108)

$$|Q(D)u|_{0,s}^{(0,t)}\leqslant C\sum|p_{k,j}(D)u|_{0,s}^{(0,t)},\ 0<t\leqslant b \qquad (5\text{-}111)$$

因此，若 $r(t)$ 代表(5-109)的左端，由(5-111)和定理 5-32，我们有

$$r(t)^2\leqslant C[|p(D)u|_{0,s}^{(0,t)}]^2+C\int_0^t r(\lambda)^2\,d\lambda$$

从推论 5-10 就推得想要的不等式.

推论 5-34 若 $P(D)$ 是纯双曲型的，则对于所有满足等式(5-2)的 $u\in C^m(\overline{\Omega})\cap H^{0,s}$，

$$\sum_{k,j}|p_{k,j}(D)u|_{0,s}\leqslant C|P(D)u|_{0,s} \qquad (5\text{-}112)$$

成立.

注意到纯双曲型算子是双曲型算子．证明(5-112)的一种方法就是证明等式(5-108)蕴含着 Q 弱于 p．因此由 4-4 节的定理 4-9 就知道 $P(D)$ 是双曲型的．另一种方法就是注意到(5-112)蕴含着对于所有具有紧支集的 φ 在带形区域 $0<t<2b$ 中

$$\|\varphi\|\leqslant C\|P(D)\varphi\|$$

成立.

于是从(向后应用) 4-3 节的定理 4-5 就得到双曲性.

本节的结果都是属于 Peyser(1963)的.

5-7 例

现在我们给出几个算子的例子，并讨论它们的双曲性.

1. 波动算子 $D_t^2-\sum D_k^2$．这里 $p(\xi,\tau)=\tau^2-\sum\xi_k^2$．对于 $\xi\neq 0$，这个多项式有两个不同的实根．因此波动算子是全双曲算子.

2. 算子 $(D_t-D_1+D_2)(D_t+D_1-D_2)+\alpha D_t$．这里 $p(\xi,\tau)=(\tau-\xi_1+\xi_2)(\tau+\xi_1-\xi_2)$，而 $Q(\xi,\tau)=\alpha\tau$．因为当 $\xi_1=\xi_2$ 时 0 是

重根,所以这个算子不是全双曲型的．然而，它是纯双曲型的．因为,我们有

$$2\tau=(\tau-\xi_1+\xi_2)+(\tau+\xi_1-\xi_2)$$

这证明等式(5–108)是成立的．

3．$p(\xi,\ \tau)$还是2中同样的$p(\xi,\ \tau)$，而$Q(\xi,\ \tau)=\alpha(\xi_1-\xi_2)$．这又是纯双曲型的．因为,我们有

$$2(\xi_1-\xi_2)=-(\tau-\xi_1+\xi_2)+(\tau+\xi_1-\xi_2)$$

4．同样的$p(\xi,\ \tau)$，而$Q(\xi,\ \tau)=\alpha\xi_1$．这个算子不是双曲型的．$P(\xi,\ \tau)=p(\xi,\ \tau)+Q(\xi,\ \tau)$的根是

$$\tau=\pm\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2-4\alpha\xi_1} \tag{5-113}$$

若我们取$\xi_2=\xi_1$,又取ξ_1是具有适当符号的大数，因此,我们总可以使得这些根的虚部要多大就有多大．

5．$p(\xi,\ \tau)=(\tau^2-\xi_1^2-\xi_2^2)(\tau^2-\xi_1^2-,2\xi_2^2)$而$Q(\xi)$是一个次数$<4$的$\xi_1$, ξ_2的实系数多项式．显然,$P(D)$不是全双曲型的．然而它却是双曲型的．为证明这一点,注意到

$$P(\xi,\ \tau)=\tau^4-(\tau_1^2+\tau_2^2)\tau^2+\tau_1^2\tau_2^2+Q \tag{5-114}$$

其中$\tau_1^2=\xi_1^2+\xi_2^2$而$\tau_2^2=\xi_1^2+2\xi_2^2$．因此$P(\xi,\ \tau)$的根满足

$$2\tau^2=2\xi_1^2+3\xi_2^2\pm\sqrt{\xi_2^4-4Q} \tag{5-115}$$

当$|\xi|\to\infty$时，这个表达式变成正的．因此，对于充分大的$|\xi|$，$P(\xi,\ \tau)$的根都是实的．因此,它们的虚部对于所有的ξ都是有界的．现在假定Q是三次齐次多项式．我们来看一下在什么条件下$P(D)$会是纯双曲型的．在$p_{k,J}$中仅有的三次多项式是

$$(\tau-\tau_1)(\tau^2-\tau_2^2)$$
$$(\tau+\tau_1)(\tau^2-\tau_2^2)$$
$$(\tau^2-\tau_1^2)(\tau-\tau_2)$$
$$(\tau^2-\tau_1^2)(\tau+\tau_2)$$

现在假定我们有

$$Q(\xi)=c_1(\xi)(\tau-\tau_1)(\tau^2-\tau_2^2)+c_2(\xi)(\tau+\tau_2)(\tau^2-\tau_2^2)$$
$$+c_3(\xi)(\tau^2-\tau_1^2)(\tau-\tau_2)+c_4(\xi)(\tau^2-\tau_1^2)(\tau+\tau_2)$$

分别令$\tau=-\tau_1,\ \tau_1,\ -\tau_2$和$\tau_2$,我们发现

$$c_1=\frac{Q(\xi)}{2\tau_1\xi_2^2},\qquad c_2=\frac{-Q(\xi)}{2\tau_1\xi_2^2}$$

$$c_3=\frac{-Q(\xi)}{2\tau_2\xi_2^2},\qquad c_4=\frac{Q(\xi)}{2\tau_2\xi_2^2}$$

这些函数当且仅当 Q 的形式为

$$Q(\xi)=\beta_1\xi_1\xi_2^2+\beta_2\xi_2^3 \tag{5-116}$$

时保持有界. 因此，当且仅当 Q 是(5–116)这种形式时 $P(D)$ 是纯双曲型的.

习　题

5–1 证明强解是弱解.

5–2 验证函数 $h(x,-t)$ 具有定理 5–4 的证明中对它所要求的性质.

5–3 证明等式(5–12)是一个内积而 $H^{r,s}$ 是一个 Hilbert 空间.

5–4 证明等式(5–20), (5–21)和(5–22).

5–5 证明推论 5–15.

5–6 证明在定理 5–16 的证明中描述的函数 $a_{jk}(\xi)$ 是 $m-k-1$ 次齐次函数.

5–7 证明不等式(5–56).

5–8 证明(5–69).

5–9 证明不等式(5–71).

5–10 证明不等式(5–74).

5–11 设 $p(\tau)$ 是具有 m 个不同实根的 m 次多项式. 证明其导数 $p'(\tau)$ 具有 $m-1$ 个不同的实根.

5–12 证明不等式(5–78).

5–13 证明引理 5–9 中的第二个结论.

5–14 证明(5–103), (5–104)和(5–105).

5–15 证明当 $|\xi|\to\infty$ 时等式(5–115)变为正.

5–16 设 $p(\xi,\tau)$ 为 5–7 节中例 5 所给出的. 若 Q 是次数 <3 的多项式. 问何时 $P(D)$ 是纯双曲型的? 给出例子.

5–17 设 $v\in H^{0,s}$ 并且在 $t=b$ 附近等于零，证明 $P(D)\hat{J}_\varepsilon v=\hat{J}_\varepsilon P(D)v$，其中 $P(D)$ 是任何常系数算子，而 $\hat{J}_\varepsilon$ 是由等式(5–102)给出的. 对于 $\tilde{J}_\varepsilon$

$$P(D)\tilde{J}_\varepsilon v=\tilde{J}_\varepsilon P(D)v$$

成立吗?

第六章　半空间中的边值问题（椭圆型）

6-1　引　　言

在第四章中我们已经看到对于任何函数 $g_k\in S(E^n)$ 和 $f\in S(\Omega)$，我们能解 Cauchy 问题

$$P(D_t)u(x,\ t)=f(x,\ t),\quad 0\leqslant t\leqslant b<\infty \tag{6-1}$$

$$D_t^k u(x,\ 0)=g_k(x),\quad 0\leqslant k<m \tag{6-2}$$

其中 $P(D)$ 是一个 m 阶双曲型算子而 Ω 是带形区域 $0<t<b$（4-6 节定理 4-15）．而且，证明了解 $u(x,\ t)$ 是属于 $S(\Omega)$ 的．如果取 $b=\infty$ 的话，即如果想在半空间中解方程(6-1)和(6-2)的话，我们可能想知道这个结果是否还成立．

第四章中的方法证明我们可以在半空间 Ω 中解方程(6-1)，(6-2)．但是解将不一定属于 $L^2(\Omega)$．从一个简单的例子可以看出这一点．考虑二维情形的 Cauchy 问题．

$$u_{tt}-u_{xx}=0,\quad t>0,\quad -\infty<x<\infty \tag{6-3}$$

$$u(x,\ 0)=g(x),\quad u_t(x,\ 0)=0,\quad -\infty<x<\infty \tag{6-4}$$

其中 $g(x)$ 属于 S．方程(6-3)和(6-4)的解是

$$u(x,\ t)=[g(x+t)+g(x-t)]/2 \tag{6-5}$$

若 $g>0$，u 不属于 $L^2(\Omega)$ 是显然的，这里 Ω 是半平面 $t>0$．事实上

$$\iint_\Omega |u(x,\ t)|^2dx\,dt\geqslant\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty g(x+t)^2dx\,dt=\infty$$

现在问题在于是否存在一个整数 r，使得

$$P(D)u(x,\ t)=f(x,\ t),\quad t>0 \tag{6-6}$$

$$D_t^k u(x,\ 0)=g_k(x),\quad 0\leqslant k<r \tag{6-7}$$

在 $L^2(\Omega)$ 中有一个解，这里 Ω 是半空间 $t>0$．目前，我们并不知

道双曲性是否仍然是一种宝贵的性质. 所以，让我们这样来说明这个问题. 对于常系数算子 $P(D)$ 来说，是否存在整数 r，使得方程(6-6)，(6-7)对于任选的 $f\in S(E^{n+1})$ 和 $g_k\in S(E^n)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中有一个解？显然，如果对于某个 r 值，这样的解存在，则对于任何更小的 r 值都有 $L^2(\Omega)$ 解. 当然，我们感兴趣的是得到最大的 r 值. 另一种考虑这一问题的途径是问：在什么条件下方程(6-6)，(6-7)在 $L^2(\Omega)$ 中至多只有一个解，即问：在什么条件下解是唯一的. 因为如果方程(6-6)，(6-7)只有一个解，则 $g_r(x)$ 已被确定了，而不能任意选择.

本章专门研究方程(6-6)，(6-7)，尤其是研究它们在 $L^2(\Omega)$ 中解的存在和唯一性. 和通常一样，我们没有着手解决这种问题的特别的想法. 所以，我们还是求助于先考虑特殊情形. 在 4-5 节中我们已经发现研究常微分算子是有用的. 我们在 6-2 到 6-6 节中再次试图这样做. 若 G 是区间 (a, b)，我们令 $S(a, b)$ 表示集合 $S(G)$ (见 2-3 节).

6-2 半直线上的问题

现在我们考虑 $P(D)$ 只是关于 t 的算子的情形，即 $P(D)$ 是一个常微分算子的情形. 这时，方程(6-6)，(6-7)化为

$$P(D_t)u(t)=f(t), \quad t>0 \tag{6-8}$$

$$D_t^k u(0)=g_k, \quad 0\leqslant k<r \tag{6-9}$$

其中 $f\in S(E^1)$ 而 g_k 是常数. 我们在 $L^2(0, \infty)$ 中求解. 我们假定 $P(z)$ 是 m 次多项式，并且 z^m 的系数为 1.

我们首先考虑 $f\equiv 0$ 的情形.

$$P(D_t)u=0, \quad t>0 \tag{6-10}$$

的通解是

$$u=\sum_{k=1}^{m} c_k e^{i\tau_k t} \tag{6-11}$$

其中 τ_k 是 $P(z)=0$ 的根. (若有重根，则 c_k 变成 t 的多项式. 这种修改并不影响到现时的讨论.) 现在为使 u 属于 $L^2(0, \infty)$，对

于任何使得 $\operatorname{Im}\tau_k\leqslant 0$ 的 k，系数 c_k 一定等于零．因为，否则的话，当 $t\to\infty$ 时 u 之绝对值将恒大于一个正数，所以 u 不可能属于 $L^2(0,\infty)$．现在，方程(6-9)强加在系数上 r 个条件．所以，看来下列定理是合理的．

定理 6-1 若存在 $P(z)=0$ 的 r 个根 $\tau_1,\cdots,\tau_r$(各按其重数计算)，使得

$$\operatorname{Im}\tau_k>0,\quad 1\leqslant k\leqslant r \tag{6-12}$$

则方程(6-9)，(6-10)对于任选的一组常数 g_k，在 $S(0,\infty)$ 中有一解．

证明　我们希望求形为

$$u(t)=\sum_{k=1}^{r}c_k e^{i\tau_k t} \tag{6-13}$$

的解．现在，若 Γ 是包围 τ_k 的简单闭曲线，我们知道

$$e^{i\tau_k t}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{e^{izt}dz}{z-\tau_k} \tag{6-14}$$

因此，若 Γ 包围 $\tau_1,\cdots,\tau_r$，则等式(6-13)可以写成形式

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{Q(z)e^{izt}dz}{P_+(z)} \tag{6-15}$$

其中

$$P_+(z)=(z-\tau_1)\cdots(z-\tau_r) \tag{6-16}$$

与 4-5 节的等式(4-82)类似，我们来考虑函数

$$w_r(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{e^{izt}dz}{P_+(z)} \tag{6-17}$$

在积分号下求微商，我们得到

$$D_t^k w_r(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{z^k e^{izt}dz}{P_+(z)},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{6-18}$$

这表明 w_r 是方程(6-10)的解．现在，若取 Γ 是以原点为心，R 为半径的圆周，取 R 充分大以至于 Γ 包围 $\tau_1,\cdots,\tau_r$，由等式(6-18)，我们有

$$D_t^k w_r(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{R^k e^{ik\theta}\cdot ie^{i\theta}R\,d\theta}{R^r e^{ir\theta}+Q(Re^{i\theta})} \tag{6-19}$$

其中 $Q(z)$ 是一个次数 $<r$ 的多项式．若 $k<r-1$，当 $R\to\infty$ 时它

趋于0. 若 $k=r-1$, 则它趋于1. 因此, $w_r(t)$ 是

$$P(D_t)u=0,\quad t>0 \tag{6-20}$$

$$D_t^k u(0)=0,\quad 0\leqslant k<r-1 \tag{6-21}$$

$$D_t^{r-1}u(0)=1 \tag{6-22}$$

的一个解. 我们必须证明 $w_r \in S(0, \infty)$. 设 $\delta>0$ 使得

$$\operatorname{Im}\tau_k>\delta,\quad 1\leqslant k\leqslant r \tag{6-23}$$

因为 w_r 是(6-13)的形式, 对于每个 k 存在一个常数 C_k, 使得

$$|D_t^k w_r(t)|\leqslant C_k(1+t)^{r+k-1}e^{-\delta t},\quad k=0,\ 1,\ \cdots \tag{6-24}$$

这就证明了 $w_r \in S(0, \infty)$. 我们可以象在4-5节中所做的那样来解方程(6-9), (6-10). 事实上, 我们令 $u_0(t)=g_0 w_r(t)$ 并归纳地定义

$$u_j(t)=\left[g_j-\sum_{i=1}^{j} D_r^{r+j-1}u_{j-1}(0)\right]w_r(t),\ 1\leqslant j<r \tag{6-25}$$

则, 函数

$$u(t)=\sum_{j=1}^{r} D_t^{r-j}u_{j-1}(t) \tag{6-26}$$

是方程(6-9), (6-10)的一个解. 其证明和4-5节中证明(4-76)是(4-72)的解一样. 注意不等式(6-24)保证由等式(6-26)给出的解 $u(t)$ 是属于 $S(0, \infty)$ 的. 证毕.

现在我们转到原来的问题(6-8), (6-9). 为了解(6-8), (6-9), 我们只要在(6-26)式上加上问题

$$P(D_t)u(t)=f(t),\quad t>0 \tag{6-27}$$

$$D_t^k u(0)=0,\quad 0\leqslant k<r \tag{6-28}$$

的一个解. 与4-5节中所展开的相似, 我们可以假设

$$v(t)=i\int_0^t f(s)w_r(t-s)ds \tag{6-29}$$

作为(6-27), (6-28)的一个可能的解. 若遵循在4-5节中的推理, 我们发现

$$D_t^k v(t)=i\int_0^t f(s)D_t^k w_r(t-s)ds,\quad 0\leqslant k<r \tag{6-30}$$

$$D_t^k v(t)=\sum_{j=r}^{k} D_t^{k-j}f(t)D_t^{j-1}w_r(0)+i\int_0^t f(s)D_t^k w_r(t-s)ds,\quad k\geqslant r \tag{6-31}$$

这些公式证明了 $v(t)$ 满足等式(6-28)．但是 $v(t)$ 满足的方程不是(6-27)而是

$$P_+(D)v(t)=f(t),\quad t>0 \tag{6-32}$$

因此，我们只是对于 $P_+(D)=P(D)$ 的情形，即对于 $P(z)=0$ 的所有的根都具有正虚部的情形，得到了方程(6-27)，(6-28)的一个解．但是，对于这种情形，我们得到的解就是我们想要的解．若 $f\in S(0,\infty)$，则 $v(t)$ 也属于 $S(0,\infty)$．为证明这一点，只要证明对于每个 j 和 k，

$$v_{jk}(t)=t^j\int_0^t f(s)D_t^k w_r(t-s)ds$$

是有界的．因为 $f\in S(0,\infty)$，所以存在常数 C，使得

$$|f(s)|\leqslant\frac{C}{(1+s)^{j+2}},\quad s>0$$

由不等式(6-24)，存在常数 C，使得

$$|D_t^k w_r(t)|\leqslant\frac{C}{(1+t)^j},\quad t>0$$

因此
$$|v_{jk}(t)|\leqslant Ct^j\int_0^t(1+t-s)^{-j}(1+s)^{-j+2}ds$$

因为对于 $0\leqslant s\leqslant t/2$ 有 $t-s\geqslant t/2$，这就给出

$$\begin{aligned}|v_{jk}(t)|&\leqslant Ct^j\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-j}\int_0^{t/2}(1+s)^{-j-2}ds\\&\quad+Ct^j\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-j}\int_{t/2}^t(1+t-s)^{-j}(1+s)^{-2}ds\\&\leqslant 2^jCt^j(2+t)^{-j}\int_0^\infty(1+s)^{-2}ds\end{aligned}\tag{6-33}$$

因此，对于每个 j 和 k，$v_{jk}(t)$ 是有界的．这就证明了 $v(t)$ 属于 $S(0,\infty)$，因此，我们已经求得了 $r=m$ 时所要的解．

当 $r<m$ 时我们能做些什么呢？这时，我们利用

引理 6-2 设 $P(D_t)$ 是任何常系数算子，又设 $f(t)$ 是 $S(E^1)$ 中的任何函数，则存在一个函数 $u(t)\in S(E^1)$，使得

$$P(D_t)u(t)=f(t),\quad t>0 \tag{6-34}$$

证明　显然只要对 $P(D_t)=D_t-\alpha$ 证明引理就够了，这里 α 是任

一复数．若 α 是实数，我们令

$$v(t) = -i\int_t^\infty e^{i\alpha(t-s)}f(s)ds \tag{6-35}$$

显然 v 满足

$$(D_t-\alpha)v=f \tag{6-36}$$

设 $\rho(t)$ 是 $C^\infty(E^1)$ 中的一个函数，当 $t>0$ 时它等于 1，当 $t<-1$ 时它等于 0，则函数 $u=\rho v$ 属于 $S(E^1)$ 并且满足方程(6-34)．若 α 不是实数，令

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{it\tau}\frac{\tilde{f}(\tau)}{\tau-\alpha}d\tau \tag{6-37}$$

其中

$$\tilde{f}(\tau)=\int_{-\infty}^\infty e^{-i\tau s}f(s)ds \tag{6-38}$$

因为 f 属于 S，所以 $\tilde{f}$ 也属于 S，因此 $\tilde{f}/(\tau-\alpha)$ 也属于 S（见 2-3 节）．因此，$u\in S$．通过 Fourier 变换我们知道 u 是方程(6-36)的一个解．这就完成了证明．

现在我们回到方程(6-27)，(6-28)．设

$$P_-(z)=\frac{P(z)}{P_+(z)} \tag{6-39}$$

由刚证明过的引理知道，存在 $h\in S(E^1)$，使得

$$P_-(D_t)h(t)=f(t),\quad t>0 \tag{6-40}$$

现在我们设 $u(t)$ 是

$$P_+(D_t)u(t)=h(t),\quad t>0 \tag{6-41}$$

和等式(6-28)的一个解．我们知道在 $S(0,\infty)$ 中有一个解．现在就很明显了，这个函数就是方程(6-27)，(6-28)的一个解．因此，我们已经证明了

定理 6-3 在定理 6-1 的假定下，对于每个 $f\in S(E^1)$ 和任选的常数 g_k，问题(6-8)，(6-9)在 $S(0,\infty)$ 中有一个解．

6-3 唯 一 性

本节我们将证明由定理 6-3 给出的解是唯一的．我们先证明

定理 6-4 设 $P(z)$ 是一个 m 次多项式. 假定 $u(t)$ 是 $C^m[a, b]$ 中的一个函数, 使得

$$P(D_t)u(t)=0, \quad a<t<b \tag{6-42}$$

$$D_t^k u(a)=0, \quad 0\leqslant k<m \tag{6-43}$$

则 $u(t)\equiv 0$.

证明 假定存在 t_1, 使得 $a<t_1\leqslant b$ 且使 $u(t_1)\neq 0$. 令

$$Y(t)=\sum_{k=0}^{m-1}|D_t^k u(t)|$$

又设 t_0 是 $[a, t_1]$ 中使 $Y(t_0)=0$ 的最高点. 我们可以假定 $P(z)$ 的形式为

$$P(z)=z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_0$$

因此, 由方程 (6-42) 和 (6-43)

$$Y(t)=Y(t)-Y(t_0)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}|D_t^k u(s)|ds$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_0}^{t}(1+|a_k|)|D_t^k u(s)|ds \tag{6-44}$$

令

$$M(t)=\operatorname*{lub}_{t_0<s<t} Y(s)$$

则 (6-44) 给出

$$Y(t)\leqslant M(t)(t-t_0)\left(m+\sum_{k=0}^{m-1}|a_k|\right), \quad t_0<t<t_1 \tag{6-45}$$

这就推出对于充分靠近 t_0 的 t

$$M(t)\leqslant\frac{1}{2}M(t) \tag{6-46}$$

但是, 因为当 $t_0<t<t_1$ 时 $M(t)>0$, 所以这是不可能的. 因此在 $[a, b]$ 中 $Y(t)\equiv 0$. 证毕.

推论 6-5 方程 (6-42) 的解构成一个 m 维空间.

证明 在 4-5 节中证明了, 对每个满足 $0\leqslant j<m$ 的 j, 我们能够解方程 (6-42) 和

$$D_t^k u(a)=\delta_{jk}, \quad 0\leqslant k<m \tag{6-47}$$

其中当 $j\neq k$ 时, $\delta_{jk}=0$ 而 $\delta_{kk}=1$. 用 $u_j(t)$ 来记这个解. u_j 是线性无关的. 因为, 若

$$\sum \alpha_j u_j(t) \equiv 0, \quad a \leqslant t \leqslant b$$

则

$$\sum \alpha_j D_t^k u_j(a) = 0, \quad 0 \leqslant k < m$$

由等式(6–47)，所有的 α_j 都等于零．现在，令 u 是方程(6–42)的任何一个解．令

$$v(t) = \sum_0^{m-1} D_t^k u(a) u_k(t)$$

由等式(6–47)

$$D_t^k v(a) = D_t^k u(a), \quad 0 \leqslant k < m$$

因此 $u-v$ 是方程(6–42)，(6–43)的一个解．由定理 6–4，$u=v$，是 u_j 的一个线性组合．因此推论就得到了证明．

定理 6–6 若 $P(z)$ 恰好有 r 个虚部为正的根(重根要计算重数)，则方程(6–42)的属于 $C^m(0, \infty) \cap L^2(0, \infty)$ 的解的集合构成一个 r 维空间．它们正好是

$$P_+(D_t)u(t) = 0 \tag{6–48}$$

的解．

证明　设 $\tau_1, \cdots, \tau_m$ 表示 $P(z)=0$ 的根．只要 j 小于 τ_k 的重数，函数 $t^j e^{i\tau_k t}$ 就是方程(6–42)的解．因为这些函数是线性无关的，并且存在 m 个这样的函数，它们构成了方程(6–42)的解的一组基．只有 $\operatorname{Im}\tau_k > 0$ 的那些解是属于 $L^2(0, \infty)$ 的，而其它解的非零线性组合不可能属于 $L^2(0, \infty)$．因为恰好有 r 个这样的函数是属于 $L^2(0, \infty)$ 的，并且它们都是方程(6–48)的解．　　证毕．

推论 6–7 在 $L^2(0, \infty)$ 中方程(6–8)，(6–9)至多有一个解．

证明　方程(6–8)的每个属于 $L^2(0, \infty)$ 的解也是方程(6–48)的一个解(定理 6–6)．于是，从定理 6–4 就立即得到所要的结果．

6–4　一般边界条件

现在我们来考虑一个比(6–8)，(6–9)更一般一些的问题．设 $Q_1(z), \cdots, Q_r(z)$ 是 r 个次数 $<m$ 的多项式．我们要求一个函数 $u(t)$ 使之满足

$$P(D_t)u(t)=f(t),\quad t>0 \tag{6-49}$$

$$Q_j(D_t)u(0)=g_j,\quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{6-50}$$

和前面一样，我们假定 $P(z)$ 是 m 次多项式而 z^m 的系数是 1. 而且，$P(z)$ 恰好有 r 个根(把重根的重数计算在内) $\tau_1, \cdots, \tau_r$，这些根满足不等式(6-12).

为了探索解决问题的方法，我们首先假定 $Q_j(z)$ 的次数都 $<\tau$. 因此

$$Q_j(z)=\sum_{k=0}^{r-1} b_{jk}z^k,\quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{6-51}$$

于是，若矩阵 (b_{jk}) 是非奇异的，则我们可以对 z^k 解方程组(6-51). 由此，若 (b^{ij}) 是逆矩阵，我们有

$$z^i=\sum_{j=1}^{r} b^{ij}Q_j(z),\quad 0\leqslant i<r \tag{6-52}$$

因此，等式(6-50)等价于

$$D_t^k u(0)=\sum_{j=1}^{r} b^{kj}g_j,\quad 0\leqslant k<r \tag{6-53}$$

因此，方程(6-49)，(6-50)的任何解都是方程(6-49)，(6-53)的一个解，反之亦然. 而且，我们知道问题(6-49)，(6-53)有唯一解(定理 6-3 和推论 6-7). 另一方面，若矩阵 (b_{jk}) 是奇异的，则存在不全为零的常数 α_j，使得

$$\sum_{j=1}^{r}\alpha_j b_{jk}=0,\quad 0\leqslant k<r$$

这意味着

$$\sum_{1}^{r}\alpha_j Q_j(z)\equiv 0 \tag{6-54}$$

因此，为了使得方程(6-49)，(6-50)有解，必须有

$$\sum_{1}^{r}\alpha_j g_j=0$$

这就表明不可能对于任选的 g_k 都有解. 此外，若 (b_{jk}) 是奇异的，则存在不全为零的常数 g_k，使得

$$\sum_{k=0}^{r-1} b_{jk}g_k=0,\quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{6-55}$$

若我们用等式(6-25)和(6-26)来定义 $u(t)$，由此立即得到 $u(t)$ 是

$$P(D_t)u(t)=0, \quad t>0 \tag{6-56}$$

$$Q_j(D_t)u(0)=0, \quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{6-57}$$

的一个解.

总结一下，我们发现，若矩阵(b_{jk})是非奇异的，则问题(6–49)，(6–50)对于f和g_k的每种选择有唯一解. 若矩阵(b_{jk})是奇异的，我们不能对所有的选择求解(6–49)，(6–50)，而且即使能解，解也不是唯一的.

现在让我们来看看当$Q_j(D_t)$的阶数可以$\geqslant r$时我们能做点什么. 幸好，这时可以化为$Q_j(D_t)$的次数$<r$的情形. 为证明这点，注意到，由部分分式，我们有

$$Q_j(z)=S_j(z)P_+(z)+R_j(z) \tag{6-58}$$

其中$R_j(z)$的次数$<r$. 若$m_j<m$是$Q_j(z)$的次数，则$S_j(z)$的次数是m_j-r. 设$P_-(z)$是由等式(6–39)定义的，则由引理6–2，对于每个$f\in S(E^1)$，存在一个$h\in S(E^1)$，使得方程(6–40)成立. 因此，(6–49)，(6–50)等价于

$$P_+(D_t)u(t)=h(t), \quad t>0 \tag{6-59}$$

$$R_j(D_t)u(0)=g_j-S_j(D_t)h(0), \quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{6-60}$$

现在这就是我们前面处理过的那种形式了. 若

$$R_j(z)=\sum_{k=0}^{r-1}c_{jk}z^k, \quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{6-61}$$

则方程(6–59)，(6–60)对于h和g_j的所有选择有唯一解当且仅当矩阵(c_jk)是非奇异的.

从等式(6–54)我们看出矩阵(b_{jk})是非奇异的当且仅当$Q_j(z)$是线性无关的. 类似地，矩阵(c_{jk})是非奇异的当且仅当$R_j(z)$是线性无关的. 若$R_j(z)$是线性无关的，我们就说$Q_j(z)$是模$P_+(z)$线性无关的. 因此，我们已经证明了

定理 6–8 若$Q_j(z)$是模$P_+(z)$线性无关的，则对于任选的$f\in S(E^1)$和常数g_j，存在一个满足方程(4–49)，(4–50)的函数$u(t)\in S(0, \infty)$.

注意，这个解也是唯一的，因为方程(6–56)的任何$L^2(0, \infty)$

解也是方程(6-48)的解(定理 6-6). 因此方程(6-56), (6-57)的解满足

$$R_j(D_t)u(0)=0, \quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{6-62}$$

但是我们已经证明方程(6-48)和(6-62)的仅有的解是 $u=0$.

6-5 一种简单情形的估计

既然我们已经会解方程(6-49), (6-50), 我们就要问一下解 u 能否用 f 和 g_i 来估计. 因为我们一直是在 $L^2(0, \infty)$ 中讨论问题,因此提出下面的问题看来是合理的: 在什么条件下对于(6-49), (6-50)的一切 $L^2(0, \infty)$ 解具有如下形式的估计:

$$\|u\|\leqslant C(\|f\|+\sum|g_i|) \tag{6-63}$$

其中常数只依赖于 $P(z)$ 和 $Q_j(z)$ (范数是 $L^2(0, \infty)$ 中的范数)?因为关于这个问题我们没有什么特别的想法, 让我们来考虑一个非常简单的情形.

设 $P(z)=z-\lambda$, 则我们可以对方程(6-49)用显式解出 u:

$$u(t)=e^{i\lambda t}u(0)+i\int_0^t e^{i\lambda(t-s)}f(s)\,ds \tag{6-64}$$

首先假定 λ 是实数, 则函数 $f(s)=e^{i\lambda s}/(1+s)$ 属于 $C^\infty[0, \infty)\cap L^2(0, \infty)$. 对这个特殊的 f, 解 u 是

$$u(t)=e^{i\lambda t}[u(0)+i\ln(1+t)] \tag{6-65}$$

显然, 对于任何的 $u(0)$ 值这个函数不属于 $L^2(0, \infty)$. 因此不可能有形为(6-63)的不等式. 其次, 我们假定 $\mathrm{Im}\,\lambda>0$. 这时, 每当 f 属于 $L^2(0, \infty)$ 时, 解(6-64)也属于 $L^2(0, \infty)$. 显然(6-64)右端第一项是属于 $L^2(0, \infty)$ 的. 因此, 只要证明当 f 属于 $L^2(0,\infty)$ 时,

$$v(t)=\int_0^t e^{i\lambda(t-s)}f(s)\,ds \tag{6-66}$$

也属于 $L^2(0, \infty)$ 就够了. 现在, 由 Schwarz 不等式(1-62),

$$|v(t)|^2\leqslant\int_0^t e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-s)}ds\int_0^t e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-s)}|f(s)|^2ds$$
$$\leqslant\frac{1}{\operatorname{Im}\lambda}\int_0^t e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-s)}|f(s)|^2ds$$

因此

$$\|v\|^2\leqslant\frac{1}{\operatorname{Im}\lambda}\int_0^\infty\int_0^t e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-s)}|f(s)|^2ds\,dt$$
$$=\frac{1}{\operatorname{Im}\lambda}\int_0^\infty|f(s)|^2\int_s^\infty e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-s)}dt\,ds$$
$$\leqslant\frac{1}{(\operatorname{Im}\lambda)^2}\int_0^\infty|f(s)|^2ds$$

由此,我们有估计

$$\|u\|\leqslant\frac{1}{\operatorname{Im}\lambda}\|f\|+\frac{1}{\sqrt{2\operatorname{Im}\lambda}}|u(0)| \tag{6-67}$$

对于 $\operatorname{Im}\lambda>0$ 时

$$(D_t-\lambda)u(t)=f(t),\quad t>0 \tag{6-68}$$

的所有的解成立. 最后, 假定 $\operatorname{Im}\lambda<0$. 使等式(6-64)可能属于 $L^2(0,\infty)$ 的仅有的情形是当

$$u(0)=-i\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(s)ds$$

的情形. 因此

$$u(t)=-i\int_t^\infty e^{i\lambda(t-s)}f(s)ds \tag{6-69}$$

这时,我们根据 Schwarz 不等式,有

$$|u(t)|^2\leqslant\int_t^\infty e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-s)}ds\int_t^\infty e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-s)}|f(s)|^2ds$$
$$\leqslant\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\int_t^\infty e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-s)}|f(s)|^2ds$$

因此

$$\|u\|^2\leqslant\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\int_0^\infty\int_t^\infty e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-s)}|f(s)|^2ds\,dt$$
$$=\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\int_0^\infty|f(s)|^2\int_0^s e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-s)}dt\,ds$$
$$\leqslant\frac{1}{(\operatorname{Im}\lambda)^2}\int_0^\infty|(f(s)|^2ds$$

因此当 $\operatorname{Im}\lambda<0$ 时，对于(6-67)这样的解，有估计

$$\|u\|\leqslant\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\|f\| \tag{6-70}$$

总结一下，我们注意到当 λ 是实数时，对于方程(6-68)的解没有形为(6-63)的估计. 若 $\operatorname{Im}\lambda>0$，则对于一种边界条件(即 $u(0)$ 是任给的)，形为(6-63)的估计才成立，而当 $\operatorname{Im}\lambda<0$ 时，只有解(6-69)，不能再加任何边界条件，形为(6-63)的估计式才成立. 在6-6节中我们将看到，对于一般情形，这种情况是有代表性的.

现在我们指出上述工作的一个推论. 在这个推论中我们将利用下列范数族

$$\|v\|_k^2=\int_0^\infty\sum_{j=0}^k|D_t^j v(t)|^2dt,\quad k=0,\ 1,\ \cdots \tag{6-71}$$

我们令 $H^k=H^k(0,\ \infty)$ 表示 $S(0,\ \infty)$ 关于范数(6-71)的完备化. 我们有

定理 6-9 设 $P(z)$ 是一个没有实根的 m 次多项式，又设 k 是一个非负整数. 则存在只依赖于 $P(z)$ 和 k 的常数 C，使得对每个 $f\in C^k[0,\ \infty)\cap H^k(0,\ \infty)$，存在一个函数 $u\in C^{m+k}[0,\ \infty)\cap H^{m+k}(0,\ \infty)$，它满足方程(6-49)和

$$\|u\|_{m+k}\leqslant C\|f\|_k \tag{6-72}$$

在证明定理 6-9 时我们将利用下面简单的引理.

引理 6-10 若 $f\in H^{k-1}$ 而 $u\in L^2(0,\ \infty)$ 是方程(6-68)的一个解，则 $u\in H^k$ 且

$$\|D_t^k u\|^2\leqslant 3^k|\lambda|^{2k}\|u\|^2+2\sum_{j=0}^{k-1}3^j|\lambda|^{2j}\|D_t^{k-j-1}f\|^2 \tag{6-73}$$

证明　用归纳法. 假定不等式(6-73)对 k 成立. 若 $f\in H^k$，$u\in L^2(0,\ \infty)$，且等式(6-68)成立，则 $u\in H^k$ 且

$$D_t^{k+1}u=\lambda D_t^k u+D_t^k f$$

因此，$u\in H^{k+1}$ 并且

$$(D_t^{k+1}u,\ D_t^k u)=\lambda\|D_t^k u\|^2+(D_t^k f,\ D_t^k u)$$

$$\begin{aligned}\|D_t^{k+1}u\|^2 &= \lambda(D_t^k u,\ D_t^{k+1}u)+(D_t^k f,\ D_t^{k+1}u)\\ &= \lambda[\bar{\lambda}\|D_t^k u\|^2+(D_t^k u,\ D_t^k f)]+(D_t^k f,\ D_t^{k+1}u)\\ &= |\lambda|^2\|D_t^k u\|^2+\lambda(D_t^k u,\ D_t^k f)+(D_t^k f,\ D_t^{k+1}u)\\ &\leqslant \frac{3}{2}|\lambda|^2\|D_t^k u\|^2+\|D_t^k f\|^2+\frac{1}{2}\|D_t^{k+1}u\|^2\end{aligned}$$

这里我们已经用了记号

$$(u,\ v)=\int_0^\infty u(t)\overline{v(t)}dt \tag{6-74}$$

因此

$$\|D_t^{k+1}u\|^2\leqslant 3|\lambda|^2\|D_t^k u\|^2+2\|D_t^k f\|^2,\ k=0,\ 1,\ \cdots \tag{6-75}$$

因为根据归纳法假设(6-73)成立,我们有

$$\begin{aligned}\|D_t^{k+1}u\|^2 &\leqslant 3|\lambda|^2[3^k|\lambda|^{2k}\|u\|^2\\ &\quad+\sum_{j=0}^{k-1}3^j|\lambda|^{2j}\|D_t^{k-j-1}f\|^2]+2\|D_t^k f\|^2\\ &=3^{k+1}|\lambda|^{2k+2}\|u\|^2+\sum_{j=0}^{k}3^j|\lambda|^{2j}\|D_t^{k-j}f\|^2\end{aligned}$$

这就表明对于 $k+1$, (6-73)成立. 此外, (6-75)表明当 $k=1$ 时不等式(6-73)成立. 因此用归纳法证明了本引理.

现在我们给出

定理 6-9 的证明　显然,只要对 $m=1$ 的情形证明定理就够了. 因为,我们总可以写出

$$P(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-\tau_k) \tag{6-76}$$

因此
$$P(D_t)=\prod_{k=1}^{m}P_k(D_t)$$
其中

$$P_k(D_t)=D_t-\tau_k \tag{6-77}$$

因此,如果当 $m=1$ 时定理成立,则我们知道存在 $u_1\in C^{k+1}[0,\ \infty)\cap H^{k+1}(0,\ \infty)$, 使得 $P_1(D_t)u_1=f$ 和

$$\|u_1\|_{k+1}\leqslant C\|f\|_k$$

而 C 只依赖于 $P_1(z)$ 和 k. 类似地,存在一个函数 $u_2\in C^{k+2}[0,\ \infty)\cap H^{k+2}(0,\ \infty)$, 使得 $P_2(D_t)u_2=u_1$ 和

$$\|u_2\|_{k+2}\leqslant C\|u_1\|_{k+1}$$

如果我们把这个过程重复 m 次,我们就得到所要的结果.

为证明 $m=1$ 时的结果, 假定 $f\in C^k[0,\infty)\cap H^k(0,\infty)$, $P(z)=z-\lambda$. 令

$$u(t)=i\int_0^t e^{i\lambda(t-s)}f(s)ds, \quad 若 \quad \mathrm{Im}\,\lambda>0 \tag{6-78}$$

和

$$u(t)=-i\int_t^\infty e^{i\lambda(t-s)}f(s)ds, \quad 若 \quad \mathrm{Im}\,\lambda<0 \tag{6-79}$$

显然, $u\in C^{k+1}[0,\infty)$ 且满足方程(6-68). 由(6-67)和(6-70)我们知道 $u\in L^2(0,\infty)$. 现在我们应用引理 6-10 得出结论: $u\in H^{k+1}(0,\infty)$ 且满足

$$\|u\|_{k+1}^2\leqslant C(\|u\|^2+\|f\|_k^2)$$

其中常数 C 只依赖于 λ 和 k. 若现在我们应用不等式(6-67)和(6-70), 我们就得到所要的结果. 这就完成了证明.

推论 6-11 若 $P(z)$ 是一个 m 次多项式, 它的所有的根均有负虚部, 而 k 是一个非负整数, 则存在一个只依赖于 $P(z)$ 和 k 的常数 C, 使得

$$\|u\|_{m+k}\leqslant C\|P(D_t)u\|_k \tag{6-80}$$

对所有的 $u\in C^{m+k}[0,\infty)\cap H^{m+k}(0,\infty)$ 成立.

证明 对每个 $f\in C^k[0,\infty)\cap H^k(0,\infty)$, 存在一个 $u\in C^{m+k}[0,\infty)\cap H^{m+k}(0,\infty)$, 使得 $P(D_t)u=f$ 并且(6-72)成立,其中的常数依赖于 $P(z)$ 和 k (定理 6-9). 若 $P(z)$ 没有带有正虚部的根, 则函数 u 是 $P(D_t)u=f$ 在 $L^2(0,\infty)$ 中的唯一解(定理 6-6). 这就给出了(6-80).

6-6 一般情形的估计

对于一般情形, 现在我们来证明一个甚至比(6-63)还要强的不等式. 我们的主要结果是

定理 6-12 设 $P(z)$ 是一个没有实根的 m 次多项式. 设 r 是具有正虚部的根的个数(重数计算在内). 设 $Q_1(z),\cdots,Q_r(z)$ 是 r 个模

$P_+(z)$线性无关的多项式，其中 $P_+(z)$ 是由等式(6-16)定义的. 则对每个非负整数 k, 存在常数 C, 使得对于所有的 $u\in C^{m+k}[0,\infty)\cap H^{m+k}(0,\infty)$ 均有

$$\|u\|_{m+k}\leqslant C\left(\|P(D_t)u\|_k+\sum_{j=1}^{r}|Q_j(D_t)u(0)|\right) \tag{6-81}$$

成立. 特别，对于所有这样的 u

$$\|u\|_{m+k}\leqslant C\left(\|P(D_t)u\|_k+\sum_{j=0}^{r-1}|D_t^j u(0)|\right) \tag{6-82}$$

成立.

在证明这个定理时，我们将用到另外两个引理.

引理 6-13 对于所有的函数 $u\in C^{r+k}[0,\infty)\cap H^{r+k}(0,\infty)$, 必有常数 C 存在使下式成立:

$$\|u\|_{r+k}\leqslant C\|P_+(D_t)u\|_k \tag{6-83}$$

但这里 u 应满足

$$D_t^j u(0)=0,\quad 0\leqslant j<r \tag{6-84}$$

证明 设 $\tau_1,\cdots,\tau_r$ 是 $P_+(z)=0$ 的根. 设 u 满足等式(6-84), 且令 $f=P_+(D)u$, 而

$$u_1=(D_t-\tau_2)\cdots(D_t-\tau_r)u$$

则 u_1 满足

$$(D_t-\tau_1)u_1(t)=f(t),\quad t>0 \tag{6-85}$$

$$u_1(0)=0 \tag{6-86}$$

这个问题仅有一解，即

$$u_1(t)=i\int_0^t e^{i\tau_1(t-s)}f(s)ds \tag{6-87}$$

由(6-67)和(6-73)知存在常数 C, 使得

$$\|u_1\|_{k+1}\leqslant C\|f\|_k$$

其次，令

$$u_2=(D_t-\tau_3)\cdots(D_t-\tau_r)u$$

则 u_2 满足

$$(D_t-\tau_2)u_2(t)=u_1(t),\quad t>0$$

$$u_2(0)=0$$

因此，存在常数 C, 使得

$$\|u_2\|_{k+2}\leqslant C\|u_1\|_{k+1}$$

这样继续做下去，最终就得到所要的结果.

引理 6-14 $H^1(0,\infty)$中的函数是有界的并且满足

$$|u(t)|^2\leqslant 2\|u\|_1^2 \tag{6-88}$$

证明 由 5-3 节的引理 5-8，对于 $t\leqslant\lambda\leqslant t+1$ 我们有

$$|u(t)|^2=|u(\lambda)|^2-2\mathrm{Re}\, i\int_t^\lambda \bar{u}(s)D_t u(s)ds$$

$$\leqslant |u(\lambda)|^2+\int_t^{t+1}|u(s)|^2 ds+\int_t^{t+1}|D_t u(s)|^2 ds$$

两边对 λ 从 t 到 $t+1$ 积分，我们得到

$$|u(t)|^2\leqslant 2\int_t^{t+1}|u(s)|^2 ds+\int_t^{t+1}|D_t u(s)|^2 ds \tag{6-89}$$

对于 $u\in S(0,\infty)$ 这蕴含着(6-88). 因为 $S(0,\infty)$ 中的函数在 $H^1(0,\infty)$中稠密，结论就得到了.

现在我们可以给出

定理 6-12 的证明 设 u 是 $C^{m+k}[0,\infty)\cap H^{m+k}(0,\infty)$ 中的一个函数，又令 $h=P_+(D_t)u$. 设多项式 $S_j(z)$, $R_j(z)$ 由等式(6-58)定义，又令

$$g_j=Q_j(D_t)u(0)-S_j(D_t)h(0),\quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{6-90}$$

设 v_k 是问题

$$P_+(D_t)v_k(t)=0,\quad t>0 \tag{6-91}$$

$$R_j(D_t)v_k(0)=\delta_{jk},\quad 1\leqslant j\leqslant k \tag{6-92}$$

的解. 根据定理 6-8，存在这样一个解. 令

$$v=u-\sum g_k v_k \tag{6-93}$$

则 v 满足

$$P_+(D_t)v(t)=h(t),\quad t>0 \tag{6-94}$$

$$D_t^j v(0)=0,\quad 0\leqslant j<r \tag{6-95}$$

从方程(6-91)和(6-93)可以得到结果(6-94). 为了验证(6-95)，注意到，由等式(6-58)，

$$R_j(D_t)v(0)=Q_j(D_t)v(0)-S_j(D_t)h(0)$$

$$=g_j-\sum g_k Q_j(D_t)v_k(0)=0,\ 1\leqslant j\leqslant r$$

因为 $R_j(z)$ 是线性无关的，根据(6-53)，它是等价于(6-95)的.

因为 v 满足方程(6-94)，(6-95)，所以存在与 v 无关的常数 C，使得

$$\|v\|_{m+k}\leqslant C\|h\|_{m-r+k} \tag{6-96}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\|u\|_{m+k}&\leqslant\|v\|_{m+k}+\sum|g_j|\|v_j\|_{m+k}\\&\leqslant C(\|h\|_{m-r+k}+\sum|g_j|)\end{aligned} \tag{6-97}$$

其中常数 C 不依赖于 u. 因为 h 满足

$$S(D_t)h(t)=P(D_t)u(t)$$

其中 $S(z)$ 由等式(6-39)给出，由推论 6-11 我们有

$$\|h\|_{m-r+k}\leqslant C\|P(D_t)u\|_k \tag{6-98}$$

而且，由等式(6-90)，

$$|g_j|\leqslant|Q_j(D_t)u(0)|+|S_j(D_t)h(0)| \tag{6-99}$$

因为 $S_j(z)$ 是次数 $<m-r$ 的多项式，由引理 6-14 和不等式(6-98)，我们有

$$\begin{aligned}|S_j(D_t)h(0)|&\leqslant 2\|S_j(D_t)h\|_1\leqslant C\|h\|_{m-r}\\&\leqslant C'\|P(D_t)u\|\end{aligned} \tag{6-100}$$

现在若把(6-97)到(6-100)结合起来，我们就得到(6-81). 显然，(6-82)是一特殊情形. 证毕.

关于不等式(6-81)我们想做一个重要的说明. (6-81)中的常数 C 连续地依赖于 $P(z)$ 和 $Q_j(z)$ 的系数. 连续依赖的意思就是：若 $\widetilde{P}(z)$ 和 $\widetilde{Q}_j(z)$ 是另外的多项式，它们的系数分别和 $P(z)$ 及 $Q_j(z)$ 相应的系数很接近，则对于所有 $u\in C^{m+k}[0,\infty)\cap H^{m+k}(0,\infty)$，不等式

$$\|u\|_{m+k}\leqslant\widetilde{C}(\|\widetilde{P}(D_t)u\|_k+\sum|\widetilde{Q}_j(D_t)u(0)|) \tag{6-101}$$

成立，其中的常数 $\widetilde{C}$ 接近于 C. 为证明这一点，注意到

$$\|P(D_t)u-\widetilde{P}(D_t)u\|_k\leqslant\varepsilon\|u\|_{m+k}$$

以及

$$\begin{aligned}\sum|Q_j(D_t)u(0)-\widetilde{Q}_j(D_t)u(0)|&\leqslant 2\sum\|Q_j(D_t)u\\&-\widetilde{Q}_j(D_t)u\|_1\leqslant 2\varepsilon\|u\|_m\end{aligned}$$

其中 ε 是相应系数差的最大值. 因此，由(6-81)，我们有

$$\|u\|_{m+k}\leqslant C(\|\widetilde{P}(D_t)u\|_k+\sum|\widetilde{Q}_j(D_t)u(0)|)+3\varepsilon C\|u\|_{m+k}$$

现在，若 ε 充分小，我们看到(6-101)对于

$$\widetilde{C}=\frac{C}{1-3\varepsilon C}$$

是成立的．显然只要取 ε 充分小，可使 $\widetilde{C}$ 任意接近 C.

6-7 半空间中的估计

本节我们想得出对于半空间的估计，它们类似于在6-6节中得到的关于常微分方程的那种估计．我们的第一个结果是

定理6-15 设 $P(\xi, z)$ 是 m 次齐次多项式，τ^m 的系数等于1．假定

(a)对于 E^n 中每个 $\xi\neq 0$，多项式 $P(\xi, \tau)$ 至多有 r 个有正虚部的根 $\tau_1(\xi), \cdots, \tau_r(\xi)$（重根要计算重数）而没有实根．

设 $Q_1(\xi, \tau), \cdots, Q_r(\xi, \tau)$ 是 r 个 $m_1, \cdots, m_r$ 次齐次多项式，$m_1, \cdots, m_r$ 都小于 m．假定

(b)对于 E^n 中每个 $\xi\neq 0$ 多项式 $Q_j(\xi, \tau)$ 是模 $P_+(\xi, \tau)$ 线性无关的，其中

$$P_+(\xi, \tau)=(\tau-\tau_1(\xi))\cdots(\tau-\tau_r(\xi)) \qquad (6\text{-}102)$$

则对于每个整数 $k\geqslant 0$，存在常数 C，使得

$$\sum_{j=0}^{m+k}|\xi|^{2(m-j)}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi, t)|^2dt$$
$$\leqslant C\left(\sum_{j=0}^{k}|\xi|^{-2j}\int_0^\infty|D_t^j P(\xi, D_t)v(\xi, t)|^2dt\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{r}|\xi|^{2(m-m_j)-1}|Q_j(\xi, D_t)v(\xi, 0)|^2\right) \qquad (6\text{-}103)$$

对于所有当 ξ 固定时属于 $C^{m+k}[0, \infty)\cap H^{m+k}(0, \infty)$ 的函数 $v(\xi, t)$ 成立．常数 C 不依赖于 ξ 或 v.

证明　对于每个满足 $|\xi|=1$ 的 $\xi\in E^n$，存在一个依赖于 ξ 的常数 $C=C_\xi$，使得

$$\sum_{j=0}^{m+k}\int_0^\infty|D_\lambda^j h(\xi, \lambda)|^2d\lambda\leqslant C\left(\sum_{j=0}^{k}\int_0^\infty|D_\lambda^j P(\xi, D_\lambda)h(\xi, \lambda)|^2d\lambda\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{r}|Q_j(\xi, D_\lambda)h(\xi, 0)|^2\right) \quad (6\text{-}104)$$

对于所有具有下列性质的函数 h 成立，即对于每个 $\xi\neq0$，$h(\xi, t)\in C^{m+k}[0, \infty]\cap H^{m+k}(0, \infty)$，并且 C 不依赖于 h（定理 6-12）。此外，常数 C 连续地依赖于 ξ（见 6-6 节末）。因为集合 $|\xi|=1$ 在 E^n 中是紧的，所以存在一个不依赖于 ξ 的常数 C，使得(6-104)对于所有的 h 和使 $|\xi|=1$ 的 ξ 成立。现在，若对于每个 $\xi\neq0$，函数 $v(\xi, \lambda)$ 属于 $C^{m+k}[0, \infty]\cap H^{m+k}(0, \infty)$，则函数 $h(\xi, \lambda)=v(\xi, \lambda/|\xi|)$ 也属于 $C^{m+k}[0, \infty]\cap H^{m+k}(0, \infty)$。代入 (6-104)，对于 $\xi\neq0$ 我们有

$$\sum_{j=0}^{m+k}\int_0^\infty\left|D_\lambda^j v\left(\xi, \frac{\lambda}{|\xi|}\right)\right|^2 d\lambda$$
$$\leqslant C\left(\sum_{j=0}^{k}\int_0^\infty\left|D_\lambda^j P\left(\frac{\xi}{|\xi|}, D_\lambda\right)v\left(\xi, \frac{\lambda}{|\xi|}\right)\right|^2 d\lambda\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{r}\left|Q_j\left(\frac{\xi}{|\xi|}, D_\lambda\right)v(\xi, 0)\right|^2\right)$$

若我们作变量替换 $t=\lambda/|\xi|$，这就给出了(6-103)。　　　　证毕。

现在我们来去掉 $P(\xi, \tau)$ 和 $Q_j(\xi, \tau)$ 是齐次的这一限制。

定理 6-16　设 $P(\xi, \tau)$ 和 $Q_1(\xi, \tau)$, …, $Q_r(\xi, \tau)$ 是多项式，其主部满足定理 6-15 的假设。则对每个整数 $k\geqslant0$，存在只依赖于 $P(\xi, \tau)$，$Q_j(\xi, \tau)$ 和 k 的常数 C，使得

$$\sum_{j=0}^{m+k}|\xi|^{2(m-j)}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi, t)|^2 dt$$
$$\leqslant C\left(\sum_{j=0}^{k}|\xi|^{-2j}\int_0^\infty|D_t^j P(\xi, D_t)v(\xi, t)|^2 dt\right.$$
$$+\sum_{j=1}^{r}|\xi|^{2(m-m_j)-1}|Q_j(\xi, D_t)v(\xi, 0)|^2$$
$$\left.+|\xi|^{-2k}\int_0^\infty|v(\xi, t)|^2 dt\right) \tag{6-105}$$

对于所有的函数 v 成立，其中的 v 使得对于每个固定的 ξ，$v(\xi, t)$ 属于 $C^{m+k}[0, \infty]\cap H^{m+k}(0, \infty)$。

在证明这个定理时我们将利用下列引理。

引理 6-17　不等式

$$|v(\xi, \lambda)|^2\leqslant2\sum_{j=0}^{1}|\xi|^{1-2j}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi, t)|^2 dt \tag{6-106}$$

对于所有的 $\lambda\geqslant 0$ 和所有的函数 v 成立，其中的 $v(\xi,\ t)$ 对于固定的 ξ，属于 $C^1[0,\ \infty]\cap H^1(0,\ \infty)$.

证明　若 v 是这样一个函数，则对于每个固定的 $\xi\neq 0$，函数 $h(\xi,t)=v(\xi,\ t/|\xi|)$ 也是这样的函数．因此，由引理 6-14，

$$|h(\xi,\ |\xi|\lambda)|^2\leqslant 2\sum_0^1\int_0^\infty|D_\tau^j h(\xi,\ \tau)|^2 d\tau$$

若做变换 $t=\tau/|\xi|$，我们就得到不等式(6-106)．

引理 6-18　对于 $k\geqslant 0$，不等式

$$\sum_{j=0}^k|\xi|^{-2j}|D_t^j v(\xi,\ t)|^2\leqslant 4\sum_{j=0}^{k+1}|\xi|^{1-2j}\int_0^\infty|D_\tau^j v(\xi,\ \tau)|^2 d\tau \tag{6-107}$$

对于所有的 $t\geqslant 0$ 和所有具如下性质的 v 成立：对固定的 ξ，有 $v(\xi,\ t)$ 属于 $C^k[0,\ \infty]\cap H^k(0,\ \infty)$.

证明　由引理 6-17，

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^k|\xi|^{-2j}|D_t^j v(\xi,\ t)|^2&\leqslant 2\sum_{j=0}^k|\xi|^{1-2j}\int_0^\infty|D_\tau^j v(\xi,\ \tau)|^2 d\tau\\&\quad+2\sum_{j=0}^k|\xi|^{-1-2j}\int_0^\infty|D_\tau^{j+1}v(\xi,\ \tau)|^2 d\tau\\&\leqslant 4\sum_{j=0}^{k+1}|\xi|^{1-2j}\int_0^\infty|D_\tau^j v(\xi,\tau)|^2 d\tau\end{aligned}$$

这就是所要的不等式.

引理 6-19　若 $u(t)\in L^2(-\infty,\ \infty)$ 在 $(-\infty,\ \infty)$ 中具有直到二阶的连续导数，并且这些导数都属于 $L^2(-\infty,\ \infty)$，则

$$\int_{-\infty}^\infty|D_t u(t)|^2 dt=\int_{-\infty}^\infty u\overline{D_t^2 u}dt \tag{6-108}$$

因此，对每个 $\varepsilon>0$，

$$\int_{-\infty}^\infty|D_t u(t)|^2 dt\leqslant\varepsilon\int_{-\infty}^\infty|D_t^2 u(t)|^2 dt+\frac{1}{4\varepsilon}\int_{-\infty}^\infty|u(t)|^2 dt \tag{6-109}$$

证明　对于 $R>0$，

$$\begin{aligned}\int_{-R}^R D_t u\overline{D_t u}\,dt=&\int_{-R}^R u\overline{D_t^2 u}\,dt-iu(R)\overline{D_t u(R)}\\&+iu(-R)\overline{D_t u(-R)}\end{aligned} \tag{6-110}$$

因为 u 及其直到二阶的导数都属于 $L^2(-\infty, \infty)$，所以当 $R\to\infty$ 时，我们有

$$\int_R^{R+1}(|u(t)|^2+|D_tu(t)|^2+|D_t^2u(t)|^2)dt\to 0$$

由(6-89)，我们知道当 $R\to\infty$ 时 $u(R)\to 0$ 和 $D_tu(R)\to 0$. 类似地，当 $R\to\infty$ 时 $u(-R)\to 0$ 和 $D_tu(-R)\to 0$. 如果我们在等式(6-110)中让 $R\to\infty$，我们就得到等式(6-108). 不等式(6-109)只是一个简单的推论.

引理 6-20 存在常数 K，使得对于每个 $u\in H^2(0, \infty)$ 和 $\varepsilon>0$,

$$\int_0^\infty|D_tu(t)|^2dt\leqslant\varepsilon\int_0^\infty|D_t^2u(t)|^2dt+\frac{K}{\varepsilon}\int_0^\infty|u(t)|^2dt \tag{6-111}$$

成立.

证明 因为根据定义，$S(0, \infty)$ 在 $H^2(0, \infty)$ 中稠密，所以只要对 $u\in S(0, \infty)$ 证明不等式(6-111)就够了. 令

$$\begin{aligned} v(t)&=u(t), & t>0\\ &=6u(-t)-8u(-2t)+3u(-3t), & t<0 \end{aligned} \tag{6-112}$$

由此立即得到在 $(-\infty, \infty)$ 中 $v(t)$ 有直到二阶的连续导数并且这些导数都属于 $L^2(-\infty, \infty)$. 而且，存在一个不依赖 u 的常数 C，使得

$$\int_{-\infty}^0|D_t^kv(t)|^2dt\leqslant C\int_0^\infty|D_t^ku(t)|^2dt,\ k=0, 1, 2 \tag{6-113}$$

因此，由引理 6-19,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty|D_tu(t)|^2dt&\leqslant\int_{-\infty}^\infty|D_tv(t)|^2dt\\ &\leqslant\frac{\varepsilon}{C+1}\int_{-\infty}^\infty|D_t^2v(t)|^2dt+\frac{C+1}{4\varepsilon}\int_{-\infty}^\infty|v(t)|^2dt\\ &\leqslant\varepsilon\int_0^\infty|D_t^2u(t)|^2dt+\frac{(C+1)^2}{4\varepsilon}\int_0^\infty|u(t)|^2dt\end{aligned}$$

这就给出了(6-111). 证毕.

引理 6-21 对于每个 $\varepsilon>0$ 和每个整数 $k\geqslant 1$，存在常数 K，使得

$$\sum_{j=0}^{k-1}|\xi|^{-2j-2}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,\ t)|^2dt\leqslant\varepsilon\sum_{j=0}^{k}|\xi|^{-2j}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,\ t)|^2dt$$
$$+K\varepsilon^{-k}|\xi|^{-2k}\int_0^\infty|v(\xi,\ t)|^2dt \tag{6-114}$$

对于所有具有下列性质的 v 都成立：对每个固定的ξ，$v(\xi,\ t)$属于 $H^k(0,\ \infty)$.

证明　由引理 6-20，对于任何 $j\geqslant1$，

$$\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,\ t)|^2dt\leqslant\varepsilon\int_0^\infty|D_t^{j+1}v(\xi,\ t)|^2dt$$
$$+\frac{K}{\varepsilon}\int_0^\infty|D_t^{j-1}v(\xi,\ t)|^2dt$$

成立，其中常数 K 不依赖于 j，ε，ξ 或 v. 因此

$$\sum_{j=1}^{k-1}|\xi|^{-2j-2}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,\ t)|^2dt$$
$$\leqslant\varepsilon\sum_{j=1}^{k-1}|\xi|^{-2j-2}\int_0^\infty|D_t^{j+1}v(\xi,\ t)|^2dt$$
$$+\frac{K}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k-1}|\xi|^{-2j-2}\int_0^\infty|D_t^{j-1}v(\xi,\ t)|^2dt$$
$$=\varepsilon\sum_{j=2}^{k}|\xi|^{-2j}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,\ t)|^2dt$$
$$+\frac{K}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{k-2}|\xi|^{-2j-4}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,\ t)|^2dt \tag{6-115}$$

因为
$$1\leqslant\varepsilon|\xi|^2+\frac{1}{4|\xi|^2\varepsilon}$$

我们还有

$$|\xi|^{-2}\int_0^\infty|v(\xi,\ t)|^2dt\leqslant\varepsilon\int_0^\infty|v(\xi,\ t)|^2dt$$
$$+\frac{1}{4\varepsilon}|\xi|^{-4}\int_0^\infty|v(\xi,\ t)|^2dt \tag{6-116}$$

把(6-115)和(6-116)结合起来，我们有

$$\sum_{j=0}^{k-1}|\xi|^{-2j-2}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,\ t)|^2dt$$
$$\leqslant\varepsilon\sum_{j=0}^{k}|\xi|^{-2j}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,\ t)|^2dt$$
$$+\frac{K_1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{k-2}|\xi|^{-2j-4}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,\ t)|^2dt \tag{6-117}$$

现在我们可以用归纳法来证明(6-114)了. 对于 $k=1$, (6-114)显然成立. 假定对于 $k=m$, (6-114)成立. 则由不等式(6-117)

$$\sum_{j=0}^{m}|\xi|^{-2j-2}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,t)|^2dt$$

$$\leqslant \varepsilon\sum_{j=0}^{m+1}|\xi|^{-2j}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,t)|^2dt$$

$$+\frac{K_1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{m-1}|\xi|^{-2j-4}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,t)|^2dt$$

$$\leqslant \varepsilon\sum_{j=0}^{m+1}|\xi|^{-2j}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,t)|^2dt$$

$$+\frac{K_1}{\varepsilon}\Big(\frac{\varepsilon}{2K_1}\sum_{j=0}^{m}|\xi|^{-2-2j}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,t)|^2dt$$

$$+K_2\Big(\frac{\varepsilon}{2K_1}\Big)^{-m}|\xi|^{-2m-2}\int_0^\infty|v(\xi,t)|^2dt\Big)$$

这里我们已经用了归纳假设. 这就给出

$$\sum_{j=0}^{m}|\xi|^{-2j-2}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,t)|^2dt$$

$$\leqslant 2\varepsilon\sum_{j=0}^{m+1}|\xi|^{-2j}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,t)|^2dt$$

$$+K_3\varepsilon^{-m-1}|\xi|^{-2m-2}\int_0^\infty|v(\xi,t)|^2dt$$

因此对于 $k=m+1$, (6-114)成立. 这就完成了归纳法证明.

现在我们来证明定理 6-16.

定理 6-16 的证明　设 $p(\xi,\tau)$, $q_1(\xi,\tau)$, $\cdots$, $q_r(\xi,\tau)$ 分别是多项式 $P(\xi,\tau)$, $Q_1(\xi,\tau)$, $\cdots$, $Q_r(\xi,\tau)$的主部. 由定理 6-15, 存在常数 C, 使得

$$\sum_{j=0}^{m+k}|\xi|^{2(m-j)}\int_0^\infty|D_t^j v(\xi,t)|^2dt$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{j=0}^{k}|\xi|^{-2j}\int_0^\infty|D_t^j p(\xi,D_t)v(\xi,t)|^2dt$$

$$+\sum_{j=1}^{r}|\xi|^{2(m-m_j)-1}|q_j(\xi,D_t)v(\xi,0)|^2\Big) \tag{6-118}$$

因为 $P(\xi,\tau)-p(\xi,\tau)$是次数 $<m$ 的多项式, 我们有

$$\sum_{j=0}^{k}|\xi|^{-2j}\int_0^\infty|D_t^j[P(\xi,D_t)-p(\xi,D_t)]v(\xi,t)|^2dt$$

$$\leqslant C\sum_{j=0}^{m+k-1}|\xi|^{2(m-j-1)}\int_0^\infty|D_t^jv(\xi,t)|^2dt \tag{6-119}$$

因为 $Q_j(\xi,\tau)-q_j(\xi,\tau)$ 的次数 $<m_j$, 由引理 6-18, 我们有

$$|\xi|^{2(m-m_j)-1}[Q_j(\xi,D_t)-q_j(\xi,D_t)]v(\xi,0)|^2$$

$$\leqslant C\sum_{j=0}^{m_j-1}|\xi|^{2(m-j)-3}|D_t^jv(\xi,0)|^2$$

$$\leqslant C'\sum_{j=0}^{m_j}|\xi|^{2(m-j)}\int_0^\infty|D_t^jv(\xi,t)|^2dt \tag{6-120}$$

而且, 由引理 6-21, 对每个 $\varepsilon>0$,

$$\sum_{j=0}^{m+k-1}|\xi|^{2(m-j-1)}\int_0^\infty|D_t^jv(\xi,t)|^2dt$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{j=0}^{m+k}|\xi|^{2(m-j)}\int_0^\infty|D_t^jv(\xi,t)|^2dt$$

$$+K\varepsilon^{-m-k}|\xi|^{-2k}\int_0^\infty|v(\xi,t)|^2dt \tag{6-121}$$

如果我们把不等式(6-118)到(6-121)结合起来并取 ε 充分小, 我们就得到所要的不等式(6-105). 这就完成了证明.

本节中的某些结果可以方便地用半空间 Ω 上的范数表示出来. 为此, 我们引入下列范数族, 它们与 5-2 和 5-4 节中所采用的范数相类似. 对于非负整数 k, 实数 s, 和 $a\geqslant0$, 我们令

$$[|u\|_{k,s}^{(a)}]^2=\int\sum_{j=0}^{k}|\xi|^{2(k+s-j)}|D_t^jFu(\xi,a)|^2d\xi \tag{6-122}$$

和

$$|u\|_{k,s}^2=\int_0^\infty[|u\|_{k,s}^{(t)}]^2dt \tag{6-123}$$

利用这种范数, 我们有

定理 6-22 在定理 6-15 的假设下,

$$|u\|_{m+k,s}\leqslant C(|P(D)u\|_{k,s}+\sum_{j=1}^{r}|Q_j(D)u\|_{0,m+k+s-m_j-1/2}^{(0)} \tag{6-124}$$

对于所有的 $u\in H^{m+k,s}(\Omega)$ 成立, 其中 C 是(6-103)中的常数.

证明 从空间 $H^{k,s}(\Omega)$ 的定义 (见 5-2 节) 我们知道只要对

$u\in S(\Omega)$证明(6-124)就够了. 我们只要在(6-103)两边乘以 $|\xi|^{2s}$, 并在 E^n 上对 ξ 积分. 现在, 从 2-3 节的等式(2-22)立即得到所要结果.

定理 6-23 在定理 6-16 的假设下,

$$|u\|_{m+k,s}\leqslant C\Big(|P(D)u\|_{k,s}+\sum_{j=1}^{r}|Q_j(D)u\|_{0,m+k+s-m_j-1/2}^{(0)}$$

$$+|u\|_{0,s}\Big) \tag{6-125}$$

对所有的 $u\in H^{m+k,s}(\Omega)$ 成立, 其中 C 是(6-105)中的常数.

证明 用 $|\xi|^{2k}$ 乘以(6-105)并对 ξ 积分.

定理 6-24 对于整数 $k\geqslant 0$ 和实数 s,

$$|u\|_{k,s+1/2}^{(t)}\leqslant 2|u\|_{k+1,s},\quad t\geqslant 0,\quad u\in H^{k+1,s} \tag{6-126}$$

证明 从引理6-18立即得到这个结论.

定理 6-25 对于每个整数 $k\geqslant 1$ 存在常数 K, 使得对于所有的 $\varepsilon>0$, 实数 s 和 $u\in H^{k,s}$

$$|u\|_{k-1,s}\leqslant \varepsilon|u\|_{k,s}+K\varepsilon^{-k}|u\|_{0,s} \tag{6-127}$$

成立.

证明 应用引理 6-21.

我们还可以应用由 5-2 节等式(5-13)给出的范数 $|u|_{k,s}$. 为了把它们应用到定义在 Ω 上的函数上去, 在(5-13)中我们必须取 $b=\infty$. 因此, 在现在这种情况下,

$$|u|_{k,s}^2=\int d\xi\int_0^\infty\sum_{j=0}^{k}(1+|\xi|)^{2(k+s-j)}|D_t^jFu(\xi,\ t)|^2dt \tag{6-128}$$

注意它和等式(6-123)之间的差别. 显然, 我们有

$$|u\|_{k,s}\leqslant|u|_{k,s}\quad s\geqslant 0 \tag{6-129}$$

我们还有

$$|u|_{k,s}\leqslant C(|u\|_{0,s}+|u\|_{k,s}),\quad s\geqslant 0 \tag{6-130}$$

其中常数 C 只依赖于 k 和 s (见 2-4 节不等式(2-45)) 由(6-125)和(6-130), 我们有

定理 6-26 当 $s\geqslant 0$, 在定理 6-16 的假设下, 对于所有的 $u\in$

$H^{m+k,s}(\Omega)$

$$|u|_{m+k,s}\leqslant C(|P(D)u\|_{k,s}+\sum_{j=1}^{r}|Q_j(D)u\|^{(0)}_{0,m+k+s-m_j-1/2}+|u\|_{0,s})\qquad(6\text{–}131)$$

成立。

6–8 半空间中的存在性

现在我们应用在6–7节中得到的不等式来在半空间 $t\geqslant 0$ 中证明

$$P(D)u(x,\ t)=f(x,\ t),\quad t>0\qquad(6\text{–}132)$$

$$Q_j(D)u(x,\ 0)=g_j(x),\quad 1\leqslant j\leqslant r\qquad(6\text{–}133)$$

的解的存在性. 我们将证明

定理 6–27 设 $P(D)$ 和 $Q_j(D)$ 满足定理 6–15 的假设. 设 Ω 表示半空间 $t>0$, 还假定 $f\in C^\infty(\overline{\Omega})$, 且对于每个 k 和 μ, $D_x^\mu D_t^k f\in L^2(\Omega)$. 假定每个 $g_j\in C^\infty(E^n)$, 且对于每个 μ, $D^\mu g\in L^2(E^n)$. 则存在唯一的函数 $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$, 满足方程(6–132), (6–133), 并使对于每个 k 和 μ, $D_x^\mu D_t^k\in L^2(\Omega)$.

在证明这个定理时我们将用到几个引理.

引理 6–28 若 $v(x)\in C^{|\mu|}(E^n)\cap L^2(E^n)$ 和 $\xi^\mu Fv\in L^2(E^n)$, 则

$$F(D^\mu v)=\xi^\mu Fv\qquad(6\text{–}134)$$

证明 对于 $\varphi\in C_0^\infty(E^n)$, 由 2–3 节的等式(2–22),我们有

$$(D^\mu v,\ \varphi)=(v,\ D^\mu\varphi)=(Fv,\ \xi^\mu F\varphi)=(F^{-1}[\xi^\mu Fv],\ \varphi)$$

由此,由 4–6 节的引理 4–17

$$D^\mu v=F^{-1}[\xi^\mu Fv]$$

两边求 Fourier 变换,我们得到等式(6–134).

我们再次利用由(6–128)式给出的范数 $|u|_{k,s}$(见 5–2 节).

引理 6–29 若 $v(x,\ t)$ 和 $D_t v(x,\ t)$ 都属于 $L^2(\Omega)$, 且对于某个 $s>(n+1)/2$, $|v|_{1,s}<\infty$, 则 v 是 Ω 上的有界函数, 且

$$\operatorname*{lub}_{\Omega}|v|\leqslant C|v|_{1,s}$$

常数 C 不依赖于 v.

证明　遵循 2-3 节不等式(2-34)的证明,我们有

$$|v(x, t)|\leqslant C\int(1+|\xi|)^{1/2-s}(1+|\xi|)^{s-1/2}|Fv|d\xi$$

因此

$$|v(x, t)|^2\leqslant C\int(1+|\xi|)^{1-2s}d\xi\int(1+|\xi|)^{2s-1}|Fv|^2d\xi$$

而且,由引理 6-17,

$$|Fv|^2\leqslant 2\sum_0^1(1+|\xi|)^{1-2j}\int_0^\infty|D_t^jFv|^2dt$$

把上两个不等式结合起来,我们得到

$$|v(x, t)|^2\leqslant C\sum_{j=0}^1\int_0^\infty\int(1+|\xi|)^{2(s-j)}|D_t^jFv|^2dt\,d\xi$$

这就给出了引理.

引理 6-30　设 k, m 是整数, 而 s 是实数, 它们满足 $k>m\geqslant 0$ 和 $s-m>(n+1)/2$. 假定 $u\in L^2(\Omega)$, 并且在 $C^m(\Omega)$ 中存在函数序列 $\{v_j\}$, 使得 $|v_j|_{k,s}\leqslant C$ 并且在 $L^2(\Omega)$ 中 $v_j\to u$, 则 $u\in C^m(\Omega)$ 并且对 $|\mu|+l\leqslant m$, $D_x^\mu D_t^l u\in L^2(\Omega)$.

证明　设 M 是使得 $|w|_{k,s}<\infty$ 的函数 $w\in C^m(\Omega)$ 之集的完备化. 显然, M 是 Hilbert 空间并且 $\{v_j\}$ 是 M 中的有界序列. 因此, 由 Banach-Saks 引理(1-5 节定理 1-9) $\{v_j\}$ 有一个子序列, 其算术平均$\{w_j\}$在 M 中收敛. 它们也在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到 u. 由引理 6-29, 对于 $|\mu|+i\leqslant m$,

$$\operatorname*{lub}_{\Omega}|D_x^\mu D_t^i(w_j-w_l)|\leqslant C|w_j-w_l|_{k,s}$$

因此, w_j 的所有直到 m 阶的导数在 Ω 上一致收敛. 因为 u 是 w_j 在 $L^2(\Omega)$ 中的极限, u 一定也是 w_j 的一致极限. 因此, $u\in C^m(\Omega)$, 并且 u 的直到 m 阶的导数都是 w_j 的相应的导数的一致极限. 因为 w_j 的这些导数也在 $L^2(\Omega)$ 中收敛, 因此 u 的相应的导数一定是它们的极限, 从而一定属于 $L^2(\Omega)$. 这就完成了证明.

现在我们可以给出

定理 6-27 的证明　由定理 6-8, 对于 E^n 中每个 $\xi\neq 0$, 存在函数

$h(\xi, t) \in S(0, \infty)$, 使得

$$P(\xi, D_t)h(\xi, t) = Ff(\xi, t), \quad t>0 \tag{6-135}$$

$$Q_j(\xi, D_t)h(\xi, 0) = Fg_j(\xi), \quad 1 \leqslant j \leqslant r \tag{6-136}$$

(注意到对于每个 ξ, $Ff \in S(0, \infty)$). 由定理 6-15, 对于每个 $k \geqslant 0$ 存在常数 C, 使得对于所有的 ξ 和 s,

$$\sum_{j=0}^{m+k} |\xi|^{2(m+s-j)} \int_0^\infty |D_t^j h(\xi, t)|^2 dt$$

$$\leqslant C \left(\sum_{j=0}^{k} |\xi|^{2(s-j)} \int_0^\infty |D_t^j Ff(\xi, t)|^2 dt \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{r} |\xi|^{2(m+s-m_j)-1} |Fg_j(\xi)|^2 \right) \tag{6-137}$$

并且 C 不依赖于 h, f 或 g_j. 根据假定对于每个 $j \geqslant 0$ 和 $k \geqslant 0$ $|\xi|^j D_t^k Ff(\xi, t)$ 属于 $L^2(\Omega)$, 而对于每个 $1 \leqslant j \leqslant r$ 和 $k \geqslant 0$, $|\xi|^k Fg_j(\xi)$ 属于 $L^2(E^n)$. 因此, (6-137) 蕴含着对于每个 $j \geqslant 0$ 和 $k \geqslant 0$, $|\xi|^j D_t^k h(\xi, t)$ 属于 $L^2(\Omega)$.

对于每个 $t>0$, 令 $u(x, t) = F^{-1}h(\xi, t)$, 则 $u \in L^2(\Omega)$, 又根据我们刚才证明的事实, 对于每个 k 和 s 有 $|u|_{k,s} < \infty$. 设 J_ε 是在 2-2 节中定义的 E^n 上的光滑化算子. 我们断言

1. 对每个 $\varepsilon > 0$, $J_\varepsilon u \in C^\infty(\Omega)$.
2. 当 $\varepsilon \to 0$ 时在 $L^2(\Omega)$ 中 $J_\varepsilon u \to u$.
3. 对每个 k 和 s, $|J_\varepsilon u|_{k,s} \leqslant |u|_{k,s}$.

从这些命题和引理 6-30 立即得到 $u \in C^\infty(\Omega)$ 并且对于每个 μ 和 k $D_x^\mu D_t^k u \in L^2(\Omega)$. 如果现在我们把逆 Fourier 变换作用到等式 (6-135) 和 (6-136) 上去, 由于引理 6-28, 我们就得到等式 (6-132), (6-133). 因此, $u(x, t)$ 就是所要的解. 因为 $h(\xi, t) = Fu$ 满足使 (6-103) 成立的条件, 所以从定理 6-15 立即得到唯一性.

因此, 剩下只要去验证命题 1-3. 首先注意到

$$J_\varepsilon u(x, t) = \iint j_\varepsilon(x-y) e^{-i\xi y} h(\xi, t) d\xi\, dy$$

因为被积函数关于 x, t 的所有的导数都是绝对可积的, 因此我们就可以在积分号下求微分(愿求多少次就可以求多少次). 因此命

题1是对的．在证明2的时候，我们注意到

$$F(J_\varepsilon u)=Fj_\varepsilon Fu \tag{6-138}$$

为证明这点，设 $\varphi(\xi)$ 是 $C_0^\infty(E^n)$ 中的任一函数．对于固定 t，由第二章的等式(2-24)和(2-62)，我们有

$$\begin{aligned}(F[J_\varepsilon u],\ \varphi)&=(u,\ J_\varepsilon F^{-1}\varphi)=(u,\ F^{-1}[Fj_\varepsilon\cdot\varphi])\\&=(Fj_\varepsilon Fu,\ \varphi)\end{aligned}$$

(这里的内积是 $L^2(E^n)$ 中的内积)．因为对于每个 $\varphi\in C_0^\infty(E^n)$ 这是对的，我们得到等式(6-138)．现在由2-5节的(2-65)，

$$|Fj_\varepsilon-1|=\left|\int[e^{-i\varepsilon\xi x}-1]j(x)\,dx\right|\leqslant\varepsilon|\xi|\int|x|j(x)\,dx$$

因此，由等式(6-138)，

$$\begin{aligned}|J_\varepsilon u-u|_{0,0}^2&=\iint_\Omega|Fu|^2|Fj_\varepsilon-1|^2d\xi\,dt\\&\leqslant\varepsilon^2\left(\int|x|j(x)\,dz\right)^2\iint_\Omega|\xi|^2|Fu|^2d\xi\,dt\end{aligned}$$

因为 $|\xi|h(\xi,\ t)$ 属于 $L^2(\Omega)$，由 Parseval 等式这就蕴含着2．最后，我们注意到，由2-5节等式(2-62)和等式(6-138)，

$$|F(J_\varepsilon u)|\leqslant|Fu|$$

这就立即给出3．　　　　证毕．

6-9 一些结果

因为我们已经在定理6-15的假设下证明了方程(6-132)，(6-133)的解的存在和唯一性，所以我们应该来决定那一类算子满足这些假设．为此我们首先注意到满足定理6-15的假设的齐次算子 $P(D)$ 一定是椭圆算子．因为，假定 $(\xi,\ \tau)$ 是实的并且是

$$P(\xi,\ \tau)=0 \tag{6-139}$$

的一个解．若 $\xi=0$，则 $P(\xi,\ \tau)=\tau^m$．因此 τ 也一定等于零．若 $\xi\neq0$，则由定理6-15的(a)，对于实的 τ，等式(6-139)不可能成立．因此等式(6-139)的仅有的实解是 $\xi=0$ 和 $\tau=0$．

我们还要指出

定理 6-31 若 $n>1$，则 E^{n+1} 上的每个齐次椭圆算子 $P(D)$ 是偶 m 阶的，并且对 $r=m/2$ 满足定理 6-15 的条件(a)．而对于比 $r=m/2$ 小的值不能满足条件(a)．

证明 设 $\xi\neq 0$ 是 E^n 中的任一向量．如果 ξ 的分量只有一个不等于零，例如，$\xi_1\neq 0$，$\xi_2=\cdots=\xi_n=0$，令

$$\xi^{(s)}=(s\xi_1,\ \sqrt{(1-s^2)}\xi_1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

若 ξ 的分量至少有两个不等于零，例如 $\xi_1\neq 0$，$\xi_2\neq 0$，则令

$$\xi^{(s)}=([s+\sqrt{(1-s^2)}]\xi_1,\ s\xi_2,\ \cdots s\xi_n)$$

在这两种情形中，$\xi^{(s)}$ 都是 s 的连续函数并且在区间 $-1\leqslant s\leqslant 1$ 上不等于零．而且

$$\xi^{(-1)}=-\xi,\ \xi^{(1)}=\xi \tag{6-140}$$

因为

$$P(\xi^{(s)},\ \tau)=0 \tag{6-141}$$

在这个区间中不可能有实根，并且这些根都连续依赖于 $\xi^{(s)}$(4-4 节引理 4-14)，在 $-1\leqslant s\leqslant 1$ 上方程(6-141)的具有正虚部的根的个数(根的重数计算在内)是不变的．因为

$$P(-\xi,\ -\tau)=(-1)^m P(\xi,\ \tau)$$

$$P(-\xi,\ \tau)=0 \tag{6-142}$$

的根正好是方程(6-139)的根的负数．因此，(6-139)的具有负虚部的根的个数等于方程(6-142)的具有正虚部的根的个数．但是，根据等式(6-140)，方程(6-139)和(6-142)的具有正虚部的根的个数是相同的．因此(6-139)的具有正虚部的根的个数等于具有负虚部的根的个数．因为(6-139)一共有 m 个根并且没有实根，因此具有正虚部的根的个数必须等于 $m/2$．因此，m 一定是偶数而 $r=m/2$．这就完成了证明．

定理 6-31 属于 Lopatinski(1953)．一个椭圆算子 $P(D)$，它是偶数阶的，并且使得 $P(D)$ 的主部 $p(\xi,\ \tau)$ 对于每个 $\xi\neq 0$ 正好有一半根在实轴的上面而且有一半根在实轴的下面，这样的 $P(D)$ 叫做**纯椭圆算子**．定理 6-31 说在高于二维的空间中的每个椭圆

算子都是纯椭圆算子．还要注意每个实系数椭圆算子一定是纯椭圆算子．

习　题

6-1 推导等式(6-11)．

6-2 证明不等式(6-24)．

6-3 证明由等式(6-35)给出的 $v(t)$ 属于 $S(0,\infty)$ 并且满足方程(6-36)．

6-4 证明对于充分靠近 t_0 的 t，(6-45)蕴含着(6-46)．

6-5 假定常数 g_k 满足等式(6-55)．证明由等式(6-25)，(6-26)定义的函数 $u(t)$ 是方程(6-56)，(6-57)的一个解．

6-6 证明方程(6-40)，(6-59)，(6-60)蕴含方程(6-49)，(6-50)．再证明方程(6-40)，(6-49)，(6-50)蕴含着方程(6-59)，(6-60)．

6-7 推导等式(6-64)．

6-8 证明由等式(6-65)给出的函数不属于 $L^2(0,\infty)$．

6-9 从等式(6-108)推导不等式(6-109)．

6-10 计算不等式(6-113)中的常数 C，由此计算(6-111)中的常数 K．

6-11 证明纯椭圆性的定义不依赖于那一个 ξ_k 被选为 τ(即，任何与 $\xi_{n+1}=\tau$ 不同的选择给出同样的结果)．

6-12 证明不等式(6-130)．

第七章 半空间中的边值问题(非椭圆型)

7-1 引 言

在6-8节的定理6-27中我们用了不等式(6-137)推知，方程(6-135)，(6-136)的解$h(\xi,t)$具有以下性质：对于每个j和k，$|\xi|^j D_t^k h(\xi,t)\in L^2(\Omega)$. 若$P(D)$和$Q_j(D)$不是齐次的，那么我们只能利用(6-105)来代替(6-103)(6-7节). 这就给出了带有附带项

$$|\xi|^{2(m+s-k)}\int_0^\infty |h(\xi,t)|^2 dt$$

的(6-137). 若我们知道$h(\xi,t)$属于$L^2(\Omega)$，则和前面一样可以得出对于每个j和k，有$|\xi|^j D_t^k h(\xi,t)\in L^2(\Omega)$. 但是迄今为止的进展没有给我们决定这一点的方法. 现在我们给出另一种更一般的方法.

和前面的做法一样，首先考虑半直线上的问题是方便的. 我们在7-2，7-3和7-5节中来做这件事. 在7-6和7-8节中考虑半空间中的问题. 例子在7-7节中给出.

7-2 在半直线上的估计

我们将证明一个比6-6节中的不等式(6-81)更为一般的不等式. 设$P(z)$是一个变量的m次多项式，$P(z)$没有实根. 设r是具有正虚部的根的个数(重根个数计算在内). 因此，若$\tau_1,\cdots,\tau_m$是这些根，我们可以把它们排列起来，使得

$$\operatorname{Im}\tau_k>0,\quad 1\leqslant k\leqslant r \tag{7-1}$$

和前面一样，我们令

$$P_+(z)=(z-\tau_1)\cdots(z-\tau_r) \tag{7-2}$$

和

$$P_-(z)=\frac{P(z)}{P_+(z)} \tag{7-3}$$

对于任何次数 $<m$ 的多项式 $Q(z)$，我们可以把 $Q(z)/P(z)$ 分解成部分分式：

$$\frac{Q(z)}{P(z)}=\frac{Q_+(z)}{P_+(z)}+\frac{Q_-(z)}{P_-(z)} \tag{7-4}$$

这里 $Q_+(z)$ 的次数 $<r$ 而 $Q_-(z)$ 的次数 $<m-r$. 假定已经给出了 r 个这样的多项式 $Q_1(z)$，…，$Q_r(z)$. 令

$$\alpha_{ij}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_{i+}(\tau)\overline{Q_{j+}(\tau)}}{|P_+(\tau)|^2}d\tau,\quad 1\leqslant i,j\leqslant r \tag{7-5}$$

和

$$\beta_{ij}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_{i-}(\tau)\overline{Q_{j-}(\tau)}}{|P_-(\tau)|^2}d\tau,\quad 1\leqslant i,j\leqslant r \tag{7-6}$$

考虑 $r\times r$ Hermite 矩阵 $A=(\alpha_{ij})$ 和 $B=(\beta_{ij})$. 我们将证明

定理 7-1 假定 A^{-1} 存在并且假定存在常数 K_1，使得

$$BA^{-1}B\leqslant K_1B \tag{7-7}$$

若 $R(z)$ 是任何满足

$$|R(\tau)|\leqslant C_1|P(\tau)|,\quad \tau\in E^1 \tag{7-8}$$

的多项式，则存在只依赖于 C_1 和 K_1 的常数 C，使得

$$\int_0^{\infty}|R(D_t)u|^2dt\leqslant C\left[\int_0^{\infty}|P(D_t)u|^2dt+\sum_{i,j=1}^{r}\alpha^{ij}U_i\overline{U}_j\right],$$
$$u\in S(0,\infty) \tag{7-9}$$

其中 $(\alpha^{ij})=A^{-1}$，而

$$U_i=Q_i(D_t)u(0),\quad 1\leqslant i\leqslant r \tag{7-10}$$

不等式(7-7)意味着对于每个复向量 $U=(U_1,\cdots,U_r)$，

$$U^*BA^{-1}BU\leqslant K_1U^*BU.$$

关于矩阵论的简短的复习将在 7-4 节中给出. 定理 7-1 的证明将在 7-3 节中给出.

在证明定理 7-1 的时候，我们将利用下面两个引理. 它们将在 7-5 节中得到证明，

引理 7-2 假定 $u\in S(0,\ \infty)$ 以及

$$w(t)=\begin{cases}u(t), & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{7-11}$$

若

$$\tilde{h}(\tau)=\int e^{-it\tau}h(t)\,dt \tag{7-12}$$

表示在 E^1 上的 Fourier 变换，则

$$\widetilde{D_t w}=\tau\tilde{w}+iu(0) \tag{7-13}$$

类似地，若 $v\in S(-\infty,\ 0)$ 以及

$$g(t)=\begin{cases}0, & t>0\\ v(t), & t<0\end{cases} \tag{7-14}$$

则

$$\widetilde{D_t g}=\tau\tilde{g}-iv(0) \tag{7-15}$$

引理 7-3 若 w 和 g 分别由式子(7-11)和(7-14)给出，则

$$\begin{aligned}u(0)&=\frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\tilde{w}(\tau)\,d\tau\\ v(0)&=\frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\tilde{g}(\tau)\,d\tau\end{aligned} \tag{7-16}$$

当不会产生混淆时，有时候我们将用

$$\int_{-\infty}^{\infty}\text{来代替}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}$$

这种积分是在 Cauchy 主值意义下的积分.

这些引理有如下推论.

推论 7-4 在引理 7-2 的假设下

$$\widetilde{D_t^k w}=\tau^k\tilde{w}+i\sum_{j=0}^{k-1}\tau^{k-j-1}D_t^j u(0),\ k=1,\ 2,\ \cdots \tag{7-17}$$

和

$$\widetilde{D_t^k g}=\tau^k\tilde{g}-i\sum_{j=0}^{k-1}\tau^{k-j-1}D_t^j v(0),\ k=1,\ 2,\ \cdots \tag{7-18}$$

证明 利用引理 7-2 并对 k 用归纳法.

推论 7-5 在同样的假设下，若 $P(z)$ 是一个 m 次多项式，则

$$\widetilde{P(D_t)w}=P(\tau)\tilde{w}+T_1(\tau) \tag{7-19}$$

$$\widetilde{P(D_t)g}=P(\tau)\tilde{g}+T_2(\tau) \tag{7-20}$$

这里 $T_1(\tau)$ 和 $T_2(\tau)$ 是次数 $<m$ 的多项式.

证明　利用推论 7-4.

推论 7-6　假定 $u\in S(0,\ \infty)$, $v\in S(-\infty,\ 0)$, 并且

$$D_t^k u(0)=D_t^k v(0),\quad 0\leqslant k<m \tag{7-21}$$

令

$$h(t)=\begin{cases} u(t), & t>0 \\ v(t), & t<0 \end{cases} \tag{7-22}$$

若 $P(z)$ 是一个次数 $\leqslant m$ 的多项式,则

$$\widetilde{P(D_t)h}=P(\tau)\tilde{h} \tag{7-23}$$

证明　注意到,根据推论 7-4 和等式(7-21), 对于 $k\leqslant m$ 有

$$\widetilde{D_t^k h}=\widetilde{D_t^k w}+\widetilde{D_t^k g}=\tau^k(\tilde{w}+\tilde{g})=\tau^k\tilde{h}$$

这就给出等式(7-23).

推论 7-7　若 $j<k$, 而 w 是由式子(7-11)给出,则

$$\tau^j\widetilde{D_t^k w}-\tau^k\widetilde{D_t^j w}=i\sum_{n=j}^{k-1}\tau^{j+k-n-1}D_t^n u(0) \tag{7-24}$$

证明　利用等式(7-17).

推论 7-8　设

$$P(z)=\sum_{k=0}^m a_k z^k,\quad Q(z)=\sum_{j=0}^m b_j z^j$$

是次数 $\leqslant m$ 的多项式. 若 w 由式子(7-11)给出,则

$$Q(\tau)\widetilde{P(D_t)w}-P(\tau)\widetilde{Q(D_t)w}$$

是一个次数 $<m$ 的多项式, τ^{m-1} 的系数等于 $ia_mQ(D_t)u(0)-ib_mP(D_t)u(0)$.

证明　利用推论 7-7.

推论 7-9　设 $P(z)$ 是一个 r 次多项式, 它的全部根都包含在半平面 $\mathrm{Im}\,z<0$ 中, 又设 $Q(z)$ 是一次数 $<r$ 的多项式. 若 w 由等式(7-11)给出,则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(\tau)}{P(\tau)}\widetilde{P(D_t)w}\,d\tau=2\pi Q(D_t)u(0) \tag{7-25}$$

类似地, 若 $P(z)$ 的根包含在 $\mathrm{Im}\,z>0$ 中, 则对于由式子(7-14)给出的 g, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\tau)}{P(\tau)} \widetilde{P(D_t)g}\, d\tau = 2\pi Q(D_t) v(0) \tag{7-26}$$

证明　因为 $P(z)$ 的根都具有负虚部，由围路积分

$$\int_{-R}^{R} \frac{\tau^k d\tau}{P(\tau)} = -\int_0^{\pi} \frac{R^k e^{ik\theta} i R e^{i\theta} d\theta}{P(Re^{i\theta})} \tag{7-27}$$

$$\to -\pi \frac{i}{a_r} \quad \text{当 } R\to\infty \text{ 时，当 } k=r-1 \text{ 时}$$

$$\to 0 \qquad \text{当 } R\to\infty \text{ 时，当 } 0\leqslant k<r-1 \text{ 时}$$

其中 a_r 是 $P(z)$ 中 z^r 的系数．并且由推论 7-8，等式(7-25)的左边等于

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\tau)}{P(\tau)} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{Q(D_t)w}\, d\tau$$

其中 $T(z)$ 是次数 $<r$ 的多项式，并且 z^{r-1} 的系数是 $ia_r Q(D_t)u(0)$．从(7-27)和引理 7-3 就推出恒等式(7-25)．等式(7-26)的证明是类似的．

7-3　定理 7-1 的证明

现在我们在引理 7-2 和 7-3 及其推论的基础上给出定理 7-1 的证明．这两个引理将在 7-5 节中证明．

设 $u(t)$ 是 $S(0, \infty)$ 中的任一函数．我们可求出一函数 $v(t)\in S(-\infty, 0)$，使得

$$\overline{P}_+(D_t) P(D_t) v(t) = 0, \quad t<0 \tag{7-28}$$

$$D_t^k v(0) = D_t^k u(0), \quad 0\leqslant k<m \tag{7-29}$$

注意到 $\overline{P}_+(z)P(z)$ 有 m 个具有负虚部的根．因此，根据 6-2 节的定理 6-1(或更确切地说，根据半直线 $t<0$ 上的相应的定理)，方程(7-28)，(7-29)的解存在．设 w, g 和 h 是由式子(7-11)，(7-14)和(7-22)分别定义的．因此

$$h = w + g \tag{7-30}$$

于是，由等式(7-20)

$$\widetilde{\overline{P}_+(D_t) P(D_t) g} = \overline{P}_+(\tau) \widetilde{P(D_t) g} - T(\tau)$$

其中 $T(z)$ 是一个次数 $<r$ 的多项式．因此，由方程(7-28)，

$$G=\widetilde{P(D_t)g}=\frac{T(\tau)}{P_+(\tau)} \tag{7-31}$$

其次，我们注意到多项式 $\{\bar{Q}_{j+}\}$ 是线性无关的．因为，假定有不全为零的常数 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$，使得

$$\sum_1^r \gamma_j \bar{Q}_{j+}=0$$

由此应推出

$$\sum_{j=1}^r \alpha_{ij}\gamma_j=0,\quad 1\leqslant i\leqslant r$$

与矩阵 A 是非奇异的这一事实相矛盾．因为多项式 $\{\bar{Q}_{j+}\}$ 是线性无关的，并且其次数 $<r$，而且有 r 个这样的多项式，所以它们构成了由所有次数 $<r$ 的多项式所组成的向量空间的一组基(见3-3节)．因此，存在常数 λ_k，使得

$$T(z)=\sum_{k=1}^r \lambda_k \bar{Q}_{k+}(z)$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{j+}}{P_+} G\, d\tau=\sum_{k=1}^r \alpha_{jk}\lambda_k,\quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{7-32}$$

另一方面，我们注意到，由等式(7-26)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{j+}}{P_+} G\, d\tau &=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{j+}}{P_+} \widetilde{P_+(D_t)P_-(D_t)g}\, d\tau \\ &=2\pi Q_{j+}(D_t)P_-(D_t)v(0)\equiv V_j, \\ &\qquad 1\leqslant j\leqslant r\end{aligned} \tag{7-33}$$

因此

$$\lambda_i=\sum_{j=1}^r \alpha^{ij} V_j,\quad 1\leqslant i\leqslant r \tag{7-34}$$

作为推论，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G|^2 d\tau=\sum \bar{\lambda}_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{j+}}{P_+} W\, d\tau=\sum_{i,j=1}^r \alpha^{ij} V_i \bar{V}_j=V^* A^{-1} V \tag{7-35}$$

其中 V 是分量为 V_j 的列向量．

因为 $P(z)$ 没有实根而 Q_{j-} 的次数小于 $m-r$，所以函数 $\bar{Q}_{j-}/\bar{P}_-$

属于 $L^2(-\infty,\infty)$. 由所有的形为

$$\sum_{j=1}^{r}\gamma_j \frac{\overline{Q}_{j-}}{\overline{P}_-}$$

的函数构成的子空间是有限维的(3-3 节引理 3-8). 所以是闭子空间(见 7-4 节). 因此 $L^2(-\infty,\infty)$ 中的任一元素可以表为两个元素之和, 其一包含在该子空间中而另一个与该子空间正交(1-5 节定理 1-3). 令 $W=\widetilde{P(D_t)w}$, 则

$$W=\sum_{j=1}^{r}\gamma_j \frac{\overline{Q}_{j-}}{\overline{P}_-}+\Phi \tag{7-36}$$

其中

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_{j-}}{P_-}\Phi\,d\tau=0,\quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{7-37}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}|W|^2 d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi|^2 d\tau+\sum_{i,j=1}^{r}\beta_{ij}\gamma_i\overline{\gamma}_j\geqslant\gamma^*B\gamma \tag{7-38}$$

其中 γ 是分量为 γ_j 的列向量. 再注意, 由等式(7-36)和(7-37),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_{j-}}{P_-}W\,d\tau=\sum_{k=1}^{r}\beta_{jk}\gamma_k,\quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{7-39}$$

另一方面, 由等式(7-25),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_{j-}}{P_-}W\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_{j-}}{P_-}\widetilde{P_-(D_t)P_+(D_t)w}\,d\tau$$
$$=2\pi Q_{j-}(D_t)P_+(D_t)u(0)\equiv Y_j,$$
$$1\leqslant j\leqslant r \tag{7-40}$$

比较一下这些恒等式就证明了

$$B\gamma=Y \tag{7-41}$$

其中 Y 是分量为 Y_j 的列向量. 由等式(7-4)和(7-29), 我们看出

$$V_j+Y_j=2\pi Q_j(D_t)u(0)\equiv U_j,\quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{7-42}$$

设 U 表示分量为 U_j 的列向量.

现在我们把分散的线索联系起来. 由等式(7-35), 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|G|^2 d\tau=V^*A^{-1}V=(U-Y)^*A^{-1}(U-Y)$$
$$\leqslant 2U^*A^{-1}U+2Y^*A^{-1}Y \tag{7-43}$$

而且由(7-41), (7-7)和(7-38), 有

$$Y^*A^{-1}Y=\gamma^*BA^{-1}B\gamma\leqslant K_1\gamma^*B\gamma\leqslant K_1\int_{-\infty}^{\infty}|W|^2d\tau \tag{7-44}$$

由等式(7-30), 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{P(D_t)h}|^2d\tau\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}|W|^2d\tau+2\int_{-\infty}^{\infty}|G|^2d\tau \tag{7-45}$$

由等式(7-29)和推论 7-6, 有

$$\widetilde{P(D_t)h}=P(\tau)\tilde{h},\quad \widetilde{R(D_t)h}=R(\tau)\tilde{h}$$

因此, 由(7-8)和 Parseval 恒等式(2-24), 有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}|R(D_t)u|^2dt&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|R(D_t)h|^2dt\\&=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)\tilde{h}|^2d\tau\leqslant C_1^2\int_{-\infty}^{\infty}|P(\tau)\tilde{h}|^2d\tau\\&=C_1^2\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{P(D_t)h}|^2d\tau\end{aligned} \tag{7-46}$$

最后, 我们指出由 Parseval 恒等式, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|W|^2d\tau=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|P(D_t)u|^2dt \tag{7-47}$$

现在我们若把(7-43)到(7-47)结合起来, 就得到(7-9). 注意到所得到的常数只依赖于 C_1 和 K_1. 证毕.

7-4 Hermite 算子和矩阵

设 H 是一(复) Hilbert 空间, 又设 A 是在 H 上处处有定义的一个有界算子(即, A 把 H 映入 H 自身)(见 2-1 节). 若

$$(u, Av)=(Au, v),\quad u, v\in H \tag{7-48}$$

我们就把 A 叫做 Hermite 算子. 这时, 对于任何 $u\in H$, (Au, u) 是实数, 因为 (Au, u) 的复共轭就是 (u, Au), 并且由等式(7-48), 就等于 (Au, u). 容易验证, 若 (Au, u) 永远是实的, 则算子 A 是 Hermite 算子.

对于 Hermite 算子 A, B, 我们用

$$A\leqslant B \tag{7-49}$$

来表示

$$(Au,\ u)\leqslant(Bu,\ u),\quad u\in H \tag{7-50}$$

因为只有当 A 和 B 是 Hermite 算子时(7-50)才有意义，因此不论何时用到形为(7-49)的表达式时都假定 A, B 是 Hermite 算子. 我们注意到

引理 7-10 若 $A\geqslant0$, 则对于所有的 $u, v\in H$,

$$|(Au,\ v)|^2\leqslant(Au,\ u)(Av,\ v) \tag{7-51}$$

和

$$(A[u+v],\ u+v)\leqslant2(Au,\ u)+2(Av,\ v) \tag{7-52}$$

成立.

证明 令 $a(u,\ v)=(Au,\ v),\ a(u)=(Au,\ u)$

则

$$a(u,\ v)=\overline{a(v,\ u)} \tag{7-53}$$

并且

$$a(u\pm v)=a(u)\pm a(u,\ v)\pm a(v,\ u)+a(v) \tag{7-54}$$

因此

$$a(u+v)+a(u-v)=2a(u)+2a(v) \tag{7-55}$$

这就证明了(7-52). 为证明(7-51), 设 u, v 是 H 的使得 $a(u, v)$ 是实的任何元素. 由等式(7-53)和(7-54),

$$4a(u,\ v)=a(u+v)-a(u-v)$$

因此由等式(7-55)得

$$4|a(u,\ v)|\leqslant a(u+v)+a(u-v)=2a(u)+2a(v)$$

因此对于任何实数 α

$$2|a(u,\ v)|\leqslant a(\alpha u)+a(v/\alpha)=\alpha^2a(u)+\alpha^{-2}a(v)$$

若 $a(u)=0$, 则令 $\alpha\to\infty$. 这就证明了 $a(u,v)=0$ 这时(7-51)成立. 类似地, 若 $a(v)=0$, 则令 $\alpha\to0$. 这就再次证明了 $a(u,v)=0$ 这时(7-51)也成立. 若 $a(u)$, $a(v)$ 都不等于零, 令 $\alpha^4=a(v)/a(u)$. 这又给出了(7-51).

现设 u, v 是任意的. 若 $a(u,\ v)$ 不是实的, 则对某个实的 θ

$$a(u,\ v)=e^{i\theta}|a(u,\ v)|$$

因此，$a(e^{-i\theta}u,\ v)$是实的，因此由刚才证明了的结论

$$|a(e^{-i\theta}u, v)|^2 \leqslant a(e^{-i\theta}u)a(v)$$

这就给出了(7-51). 证毕.

现在设 H 的维数为 $N<\infty$(见 3-3 节). 事实上，我们令 H 是由形为

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \tag{7-56}$$

的列向量组成的空间，在该空间中具有通常的加法，乘以标量和内积的定义. 我们令

$$e_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\quad e_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\quad \cdots,\quad e_N=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

易见 $$(e_j,\ e_k)=\delta_{jk},\quad 1\leqslant j,\ k\leqslant N$$

因此若 x 是由式子(7-56)给出的，则

$$x=\sum_1^N x_j e_j$$

若 $$y=\sum_1^N y_j e_j$$

则 $$(x,\ y)=\sum_1^N x_j\bar{y}_j$$

若我们定义行向量为

$$y^*=[\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \cdots,\ \bar{y}_N]$$

则由通常的矩阵乘法规则

$$y^*x=(x,\ y).$$

类似地，若A 是 H 上的线性算子，我们有

$$Ax=\sum_1^N x_k A e_k$$

因为 e_k 张成 H, 我们知道存在系数 α_{jk}, 使得

$$Ae_k=\sum_{j=1}^{N}\alpha_{jk}e_j,\quad 1\leqslant k\leqslant N$$

因此

$$Ax=\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_{jk}x_k\right)e_j \tag{5-57}$$

我们可以把 A 和矩阵

$$A=(\alpha_{jk})=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\cdots\alpha_{1N}\\ \vdots\\ \alpha_{N1}\cdots\alpha_{NN}\end{bmatrix}$$

看成是一样的. 矩阵的乘法表明 Ax 是列向量

$$Ax=\begin{bmatrix}\alpha_{11}x_1+\cdots+\alpha_{1N}x_N\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \alpha_{N1}x_1+\cdots+\alpha_{NN}x_N\end{bmatrix}$$

这正好是等式(7-57). 若

$$y^*Ax=(Ay)^*x,\quad x,y\in H \tag{7-58}$$

则我们把矩阵 A 称为 Hermite 矩阵.

因为
$$(Ay)^*x=\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\bar{\alpha}_{kj}x_k\right)\bar{y}_j$$

因此这和说

$$\alpha_{jk}=\bar{\alpha}_{kj},\quad 1\leqslant j,k\leqslant N$$

是一样的. 对于 Hermite 矩阵, 当我们的意思是想说

$$x^*Ax\leqslant x^*Bx,\quad x\in H$$

时, 我们再次记作 $A\leqslant B$. 当然, 对于一般的 Hilbert 空间中是对的那些结论, 对于现在这种特殊的 H 当然也是对的. 特别, 我们有

引理 7-11 若 $A\geqslant 0$, 则

$$|y^*Ax|^2\leqslant(x^*Ax)(y^*Ay)$$

而且
$$(x+y)^*A(x+y)\leqslant 2x^*Ax+2y^*Ay$$

若系数行列式 $\det(\alpha_{ij})$ 不等于零, 则从线性方程组的理论知道, 对于每个 $y\in H$ 方程组

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk} x_k = y_j$$

有唯一解. 这和说, 对于每个 y

$$Ax = y \tag{7-59}$$

有唯一解是同样的. 在这种情形中, 当 x, y 满足等式(7-59)时, 我们就说 A 有一个由

$$A^{-1} y = x$$

定义的逆 $A^{-1} = (\alpha^{jk})$. 矩阵 A^{-1} 的元素 α^{jk}(从理论上讲)是容易计算的. 若 A 是 Hermite 矩阵, 则 A^{-1} 也是 Hermite 矩阵.

我们还需要下列引理:

引理 7-12 Hilbert 空间的一个有限维子空间是闭的.

证明 设 S 是一个 N 维子空间, $N < \infty$, 又设 $e_1, \cdots, e_N$ 是 S 的一组基. 我们断言存在常数 C, 使得对于所有的复向量 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$,

$$\sum_{1}^{N} |\alpha_k| \leqslant C \left\| \sum_{1}^{N} \alpha_k e_k \right\| \tag{7-60}$$

成立. 在证明不等式(7-60)之前, 让我们先来证明怎样利用(7-60)来推出 S 是闭的这一结论. 设

$$x_n = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^{(n)} e_k, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{7-61}$$

是 S 中的一个向量序列, 使得

$$x_n \to x, \quad \text{在 } H \text{ 中} \tag{7-62}$$

因为 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, 由(7-60)我们有

$$\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}| \leqslant C \|x_n - x_m\| \to 0$$

因此对于每个 k, $\{\alpha_k^{(n)}\}$ 是一个复数 Cauchy 序列. 因此, 存在数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$, 使得

$$\alpha_k^{(n)} \to \alpha_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N \tag{7-63}$$

令

$$z = \sum_{1}^{N} \alpha_k e_k \tag{7-64}$$

则

$$\|x_n - z\| = \|\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k^{(n)} - \alpha_k)e_k\|$$

$$\leqslant \max\|e_k\|\sum_{k=1}^{N}|\alpha_k^{(n)} - \alpha_k| \to 0, \text{ 当 } n\to\infty \text{ 时} \tag{7-65}$$

因此 $x_n \to z$. 因为只可能有一个极限, 我们必然有 $x = z \in S$.

为证明(7-60), 假定(7-60)不成立, 则存在一个形为(7-61)的序列 $\{x_n\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{N}|\alpha_k^{(n)}| = 1 \tag{7-66}$$

但

$$x_n \to 0, \text{ 在 } H \text{ 中} \tag{7-67}$$

因为复数 $\alpha_k^{(n)}$ 都是有界的, 所以存在 $\{x_n\}$ 的一个子序列(为方便起见我们假定它就是整个序列)和复数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$, 使得(7-63)成立. 由等式(7-66), 我们有

$$\sum_{k=1}^{N}|\alpha_k| = 1 \tag{7-68}$$

用等式(7-64)来定义 z. 于是由(7-65), 有 $x_n \to z$. 由(7-67), $z=0$. 因为 e_k 是线性无关的, 所有的 α_k 都必须等于零. 但这是和等式(7-68)矛盾的. 证毕.

7-5 引理的证明

现在我们给出引理 7-2 和 7-3 的证明. 我们先从证明等式(7-13)开始. 由(7-12),

$$\widetilde{D_t w} = \int_0^\infty e^{-it\tau} D_t u(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty D_t[e^{-it\tau}u(t)]\,dt - \int_0^\infty u(t) D_t[e^{-it\tau}]\,dt$$

$$= -i[-u(0)] + \tau\widetilde{w}.$$

(回忆一下 $D_t = -id/dt$). 这就给出了等式(7-13). 为证明等式(7-15), 注意到

$$\widetilde{D_t g}=\int_{-\infty}^{0} e^{-it\tau}D_t v(t)\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0} D_t[e^{-it\tau}v(t)]\,dt-\int_{-\infty}^{0} v(t)D_t e^{-it\tau}dt$$

$$=-iv(0)+\tau\widetilde{g}$$

因此引理 7-2 得到了证明．为了证明引理 7-3，我们利用

引理 7-13 若 $f\in S(0,\infty)$，且

$$G(z)=\int_{0}^{\infty} e^{-itz}f(t)\,dt$$

则 $G(z)$ 是一个在半平面 $\operatorname{Im} z\leqslant 0$ 上有界的整函数．类似地，若 $h\in S(-\infty,\ 0)$ 且 $H(z)$ 由

$$H(z)=\int_{-\infty}^{0} e^{-itz}h(t)\,dt$$

给出，则 $H(z)$ 是一个在半平面 $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ 上有界的整函数．

证明 通过在积分号下求微商以及注意到积分都是绝对收敛的，容易验证 $G(z)$ 和 $H(z)$ 是整函数．因此

$$G'(z)=-i\int_{0}^{\infty} e^{-itz}tf(t)\,dt$$

$$H'(z)=-i\int_{-\infty}^{0} e^{-itz}th(t)\,dt$$

因为

$$e^{-it(x+iy)}=e^{-itx+ty}$$

我们看到对于 $y\leqslant 0$，$G(z)$ 是有界的，而对于 $y\geqslant 0$，$H(z)$ 是有界的．

现在我们来给出引理 7-3 的证明．重复应用等式(7-13)给出

$$\widetilde{(D_t-i)^2 w}=(\tau-i)[(\tau-i)\widetilde{w}+iu(0)]+i(D_t-i)u(0)$$

$$=(\tau-i)^2\widetilde{w}+i\tau u(0)+iD_t u(0)+2u(0) \qquad (7\text{-}69)$$

现在，由围路积分

$$\int_{-R}^{R}\frac{\tau^k d\tau}{(\tau-i)^2}=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{R^k e^{ik\theta}iRe^{i\theta}d\theta}{(Re^{i\theta}-i)^2}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{(\tau-i)^2}=0 \qquad (7\text{-}70)$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau\,d\tau}{(\tau-i)^2}=\pi i \tag{7-71}$$

由引理 7-13, 函数 $G(z)=(D_t-i)^2w$ 是整函数, 并且在下半平面中是有界的. 因此,我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{w}\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\tau)\,d\tau}{(\tau-i)^2}-iu(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau\,d\tau}{(\tau-i)^2}$$

$$-[iD_tu(0)+2u(0)]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{(\tau-i)^2} \tag{7-72}$$

再用一个围路积分可以证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\tau)\,d\tau}{(\tau-i)^2}=0 \tag{7-73}$$

如果我们现在把等式(7-70), (7-71)和(7-73)代入等式(7-72), 则得到(7-16)中的第一个恒等式. 为了得到另一恒等式, 我们利用类似的推理. 由等式(7-15),

$$\widetilde{(D+i)^2g}=(\tau+i)^2\widetilde{g}-i\tau v(0)-i(D_t+2i)v(0)$$

用围路积分可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{(\tau+i)^2}=0$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau\,d\tau}{(\tau+i)^2}=-\pi i$$

而且, 由引理 7-13, 函数 $H(z)=(D_t+i)^2g$ 是整函数并且在上半平面中有界. 由此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(\tau)\,d\tau}{(\tau+i)^2}=0$$

把最后这四个等式结合起来,就得到所要的结果.

7-6 半空间中的存在性和估计

现在我们回到问题

$$P(D)u(x,\ t)=f(x,\ t),\quad t>0 \tag{7-74}$$

$$Q_j(D)u(x,\ 0)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{7-75}$$

((7-75)的右端是给定的任意函数的情形将在以后考虑.) 我们

的假定如下:

1. 对于几乎所有的$\xi\in E^n$，多项式$P(\xi,\tau)$是z的m次多项式，并且正好有r个具有正虚部的根，而没有实根. $Q_j(\xi,z)$是z的小于m次的多项式.

若$\tau_1(\xi)$, …, $\tau_r(\xi)$是$P(\xi,z)$的具有正虚部的根，令

$$P_+(\xi,\tau)=(\tau-\tau_1(\xi))\cdots(\tau-\tau_r(\xi)) \tag{7-76}$$

它不一定是ξ的分量的多项式. 令

$$P_-(\xi,\tau)=\frac{P(\xi,\tau)}{P_+(\xi,\tau)} \tag{7-77}$$

而且对每个ξ和j，把商$Q_j(\xi,z)/P(\xi,z)$分解成部分分式

$$\frac{Q_j(\xi,z)}{P(\xi,z)}=\frac{Q_{j-}(\xi,z)}{P_+(\xi,z)}+\frac{Q_{j-}(\xi,z)}{P_-(\xi,z)} \tag{7-78}$$

令

$$\alpha_{ij}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_{i+}(\xi,\tau)\overline{Q_{j+}(\xi,\tau)}}{|P_+(\xi,\tau)|^2}d\tau,\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant r \tag{7-79}$$

和

$$\beta_{ij}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_{i-}(\xi,\tau)\overline{Q_{j-}(\xi,\tau)}}{|P_-(\xi,\tau)|^2}d\tau,\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant r \tag{7-80}$$

令$A(\xi)=(\alpha_{ij})$而$B(\xi)=(\beta_{ij})$. 我们假定

2. 对于几乎所有的$\xi\in E^n$，A^{-1}存在，并且存在常数K_1，使得几乎处处有

$$BA^{-1}B\leqslant K_1B \tag{7-81}$$

我们有

定理 7-14 设$R(\xi,z)$是一个多项式，它满足

$$|R(\xi,\tau)|\leqslant C_1|P(\xi,\tau)|,\quad \xi\in E^n,\ \tau\in E^1 \tag{7-82}$$

在前面给出的假设1和2下，存在只依赖于C_1和K_1的常数C，使得

$$\int_0^\infty|R(\xi,D_t)v(\xi,t)|^2dt$$

$$\leqslant C\left[\int_0^\infty|P(\xi,D_t)v(\xi,t)|^2dt+\sum_{i,j=1}^{r}\alpha^{ij}V_i\overline{V}_j\right] \tag{7-83}$$

对于所有具有下列性质的函数$v(\xi,t)$几乎处处成立，即对于几乎

所有的$\xi\in E^n$, $v(\xi,t)\in S(0,\infty)$. 这里$(a^{ij})=A^{-1}$. 而

$$V_j=Q_j(\xi,D_t)v(\xi,0),\ 1\leqslant j\leqslant r \tag{7-84}$$

证明　对每个ξ, 这是定理 7-1 的直接推论.

和前面一样, 设Ω表示半空间$t>0$. 若在5-2节的(5-13)中取$b=\infty$, 则5-2节中定义的范数可用于定义在Ω上的函数上去. 借助于这些范数,我们可以陈述

推论 7-15　在定理 7-14 的假设下, 存在只依赖于C_1和K_1的常数C,使得对于每个实的s,对于所有满足(7-75)的$u\in S(\Omega)$,

$$|R(D)u|_{0,s}\leqslant C|P(D)u|_{0,s} \tag{7-85}$$

成立.

证明　我们只要在(7-85)中令$v(\xi,t)=Fu$, 乘以$(1+|\xi|)^{2s}$, 并且对ξ积分就行了.

对于我们的存在性定理来说,还要做两个进一步的假定:

3. 在$P(\xi,z)$中z^m的系数$a(\xi)$有正下界和负上界. 因此,存在常数$c_0>0$, 使得

$$|a(\xi)|\geqslant c_0,\ \xi\in E^n \tag{7-86}$$

4. 存在常数K_2, 使得

$$\sum_\mu|P^{(\mu)}(\xi,\tau)|\leqslant K_2|P(\xi,\tau)|,\ \xi\in E^n,\ \tau\in E^1 \tag{7-87}$$

我们有

定理 7-16　在假设 1 到 4 下, 对于每个$f\in C^\infty(\overline{\Omega})$使得$D_x^\mu D_t^k f\in L^2(\Omega)$对于每个$\mu$和$k$均成立,则存在方程(7-74), (7-75)的唯一解$u\in C^\infty(\overline{\Omega})$, 使得对每个$\mu$和$k$, $D_x^\mu D_t^k u\in L^2(\Omega)$.

证明　和通常一样, 设F表示E^n上的 Fourier 变换. 对于每个使A^{-1}存在的ξ, 多项式$Q_1(\xi,z)$, $\cdots$, $Q_r(\xi,z)$是模$P_+(\xi,z)$线性无关的. 因此对每个这样的ξ, 存在一个函数$h(\xi,t)\in S(0,\infty)$, h满足

$$P(\xi,D_t)h(\xi,t)=Ff(\xi,t),\ t>0 \tag{7-88}$$

$$Q_j(\xi,D_t)h(\xi,0)=0,\ 1\leqslant j\leqslant r \tag{7-89}$$

(6-14 节定理 6-8). 由(7-87)和定理 7-14, 对于每个$j\geqslant 0$和μ,

$|\xi|^j P^{(\mu)}(\xi, D_t)h$ 属于 $L^2(\Omega)$. 因为任一多项式有一个某阶导数, 它等于非零常数(第一章习题 1-5), 特别是, 我们看到对每个 $j \geqslant 0$, $|\xi|^j h \in L^2(\Omega)$. 其次, 我们注意到

$$\frac{\partial^{m-1} P(\xi, \tau)}{\partial \tau^{m-1}} = m! a(\xi)\tau + p_1(\xi) \tag{7-90}$$

其中 $p_1(\xi)$ 只是 ξ 的分量的多项式. 因为对于每个 j, $|\xi|^j p_1(\xi)h \in L^2(\Omega)$, 所以 $|\xi|^j a(\xi) D_t h$ 也属于 $L^2(\Omega)$. 因为 $a(\xi)$ 是有正下界和负上界的, 所以我们知道对每个 j, $|\xi|^j D_t h \in L^2(\Omega)$. 其次注意到

$$\frac{\partial^{m-2} P(\xi, \tau)}{\partial \tau^{m-2}} = \frac{1}{2} m! a(\xi)\tau^2 + p_1(\xi)\tau + p_2(\xi) \tag{7-90a}$$

其中 $p_2(\xi)$ 也只是 ξ 的分量的多项式. 因为对每个 j, $|\xi|^j(p_1 D_t h + p_2 h) \in L^2(\Omega)$, 所以 $|\xi|^j a(\xi) D_t^2 h$ 也属于 $L^2(\Omega)$. 又因为 $a(\xi)$ 有正下界和负上界, 所以对每个 j, $|\xi|^j D^2 h \in L^2(\Omega)$. 继续这样做. 我们看到对于 $j \geqslant 0$ 和 $0 \leqslant k \leqslant m$, $|\xi|^j D_t^k h \in L^2(\Omega)$. 我们甚至可以更进一步. 因为 $h(\xi, t) \in S(0, \infty)$, 我们可以把方程(7-88)的两边对 t 微分. 因此

$$P(\xi, D_t) D_t h = D_t F f(\xi, t)$$

因为左边的形式为

$$a(\xi) D_t^{m+1} h + \sum_{k=1}^{m} q_k(\xi) D_t^k h$$

并且当 $0 \leqslant k \leqslant m$ 时, 对于每个 j, $|\xi|^j q_k(\xi) D_t^k h \in L^2(\Omega)$, 所以我们知道对每个 j, $|\xi|^j a(\xi) D_t^{m+1} h \in L^2(\Omega)$. 把方程(7-74)对 t 重复求微商并应用同样的推理, 我们得到结论: 对每个 j 和 k, $|\xi|^j D_t^k h \in L^2(\Omega)$.

对每个 $t > 0$, 令 $u(x, t) = F^{-1} h(\xi, t)$. 则 $u \in L^2(\Omega)$, 并且我们知道对每个 $x \in E^n$, $u(x, t)$ 属于 $S(0, \infty)$. 而且, 对于每个 j 和 k, $|u|_{k,j} < \infty$. 于是就象在 6-8 节定理 6-27 的证明中那样, 立即推得 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 以及对于每个 μ 和 k, $D_x^\mu D_t^k u \in L^2(\Omega)$. 从定理 7-14 推得唯一性. 这就完成了证明.

7-7 例

为了说明我们的定理，我们来研究一些例子.

1. $P(\xi, \tau)=a(\xi)(\tau-i)$，其中 $a(\xi)$是 ξ 的分量的多项式.这时，$P_+(\xi, \tau)=\tau-i$ 而 $P_-(\xi, \tau)=a(\xi)$. 取 $Q(\xi, \tau)=1$，则容易验证

$$Q_+(\xi, \tau)=\frac{1}{a(\xi)}, \quad Q_-(\xi, \tau)=0$$

因此由围道积分

$$\alpha(\xi)=\frac{1}{|a(\xi)|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{(\tau-i)(\tau+i)}=\frac{\pi}{|a(\xi)|^2}$$

因此
$$A^{-1}=\frac{|a(\xi)|^2}{\pi}, \quad B=0$$

而(7-81)是处处被满足的. 因此，由定理 7-14，若 $R(\xi, \tau)$是任何满足

$$|R(\xi, \tau)|\leqslant C_1|a(\xi)(\tau-i)|$$

的多项式，则

$$\int_0^{\infty}|R(\xi, D_t)v|^2dt\leqslant C|a(\xi)|^2\left[\int_0^{\infty}|(D_t-i)v|^2dt+|v(\xi, 0)|^2\right]$$

对于所有的 $v(\xi, t)$成立，只要对每个 ξ，$v(\xi, t)$属于 $S(0, \infty)$.（这也可以从 6-6 节定理 6-12 推出.）若 $a(\xi)$满足

$$\sum_{\mu}|a^{(\mu)}(\xi)|\leqslant K_3|a(\xi)|, \quad \xi\in E^n \tag{7-91}$$

则 $P(\xi, \tau)$ 还满足 7-6 节的假设 3 和 4. 因此我们可以应用定理 7-16 而推出，对于每个 $f\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$只要对于每个 μ 和 k，均有 $D_x^{\mu}D_t^kf\in L^2(\Omega)$，则

$$a(D_x)(D_t-i)u(x, t)=f(x, t), \quad t>0$$
$$u(x, 0)=0$$

存在唯一的具有同上性质的解.

2. $P(\xi, \tau)=a(\xi)[D_t-b(\xi)]$，其中 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 是多项式. 假定对于 $\xi\in E^n$，$\operatorname{Im} b(\xi)\geqslant 0$. 这时，$P_+(\xi, \tau)=\tau-b(\xi)$，而 $P_-(\xi, \tau)=a(\xi)$. 再取 $Q(\xi, \tau)=1$，则和上例一样

$$Q_+(\xi, \tau)=\frac{1}{a(\xi)}, \quad Q_-(\xi, \tau)=0$$

因此
$$\alpha(\xi)=\frac{1}{|a(\xi)|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{(\tau-b)(\tau-\bar{b})}=\frac{\pi}{|a(\xi)|^2\operatorname{Im} b(\xi)}$$

因此
$$A^{-1}=\frac{|a(\xi)|^2\operatorname{Im} b(\xi)}{\pi}, \quad B=0$$

而且(7-81)处处被满足．因此，若 $R(\xi,\tau)$ 满足

$$|R(\xi,\tau)|\leqslant C_1|a(\xi)[\tau-b(\xi)]|$$

则我们有不等式

$$\int_0^\infty|R(\xi,D_t)v|^2dt\leqslant C|a(\xi)|^2\left\{\int_0^\infty|[D_t-b(\xi)]v|^2dt\right.$$
$$\left.+\operatorname{Im}b(\xi)|v(\xi,0)|^2\right\}$$

其中 C 只依赖于 C_1．若我们假定 $a(\xi)$ 满足(7-91)而 $b(\xi)$ 满足

$$\sum_\mu|b^{(\mu)}(\xi)|\leqslant K_4\operatorname{Im}b(\xi),\quad\xi\in E^n\tag{7-92}$$

则 $P(\xi,\tau)$ 满足(7-86)和(7-87)．因此，对于每个 $f\in C^\infty(\overline{\Omega})$ 并只要对于每个 μ 和 k 都有 $D_x^\mu D_t^k f\in L^2(\Omega)$，则

$$a(D_x)[D_t-b(D_x)]u(x,t)=f(x,t),\quad t>0$$
$$u(x,0)=0$$

存在唯一解，它具有 f 的同样性质．

3．$$P(\xi,\tau)=\tau^2+\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2,\quad Q(\xi,\tau)=\tau+q(\xi)$$

其中 $q(\xi)$ 是实系数多项式．这时，$P_+(\xi,\tau)=\tau-i|\xi|$ 而 $P_-(\xi,\tau)=\tau+i|\xi|$．还有

$$Q_+(\xi,\tau)=\frac{(|\xi|-iq)}{2|\xi|},\quad Q_-(\xi,\tau)=\frac{(|\xi|+iq)}{2|\xi|}$$

因此
$$\alpha(\xi)=\beta(\xi)=\frac{\pi(q^2+|\xi|^2)}{4|\xi|^3}$$

因此，A^{-1} 几乎处处存在而且(7-81)成立．由定理 7-14，对于任何二阶齐次算子 $R(D)$，

$$\int_0^\infty|R(\xi,D_t)v|^2dt\leqslant C\left[\int_0^\infty|(D_t^2+|\xi|^2)v|^2dt\right.$$
$$\left.+\frac{|\xi|^3}{q^2+|\xi|^2}|[D_t+q(\xi)]v(\xi,0)|^2\right]$$

成立．因为 $P(\xi,\tau)$ 并不满足(7-87)，所以我们不能说更多的东西了(注意到若 $q(\xi)$ 是一次齐次的，则 6-8 节的定理 6-27 是适用的)．

4．$P(\xi,\tau)=\tau^2+|\xi|^2+1$；$Q(\xi,\tau)$ 和例 3 中一样．这里 $P_+(\xi,\tau)=\tau-ie$，$P_-(\xi,\tau)=\tau+ie$，其中 e 是 $1+|\xi|^2$ 的正平方根．现在我们有

$$Q_+(\xi,\tau)=\frac{(e-iq)}{2e},\quad Q_-(\xi,\tau)=\frac{(e+iq)}{2e}$$

因此
$$\alpha(\xi)=\beta(\xi)=\frac{\pi(q^2+e^2)}{4e^3}$$

仍然有 A^{-1}(处处)存在而且(7-81)成立．由定理 7-14，对于每个二阶算子

$R(D)$,

$$\int_0^\infty |R(\xi, D_t)v|^2 d\xi \leqslant C\Big[\int_0^\infty |(D_t^2+|\xi|^2+1)v|^2 dt$$

$$+\frac{e^3}{q^2+e^2}\,|[D_t+q(\xi)]v(\xi, 0)|^2\Big]$$

成立. 现在, $P(\xi, \tau)$满足(7-86)和(7-87), 所以我们知道, 对于每个$f\in C^\infty(\overline{\Omega})$, 只要$f$对每个$\mu$和$k$满足$D_x^\mu D_t^k f\in L^2(\Omega)$, 问题

$$(1-\Delta)u(x, t)=f(x, t), \quad t>0$$

$$[D_t+q(D_x)]u(x, 0)=0$$

有唯一的解$u(x, t)$, 它具有与f同样的性质.

5. $P(\xi, \tau)=(\tau-\tau_1(\xi))(\tau-\tau_2(\xi))$, 其中

$$\operatorname{Im}\tau_1(\xi)>0, \quad \operatorname{Im}\tau_2(\xi)<0$$

而 $Q(\xi, \tau)=\tau+q(\xi)$ ($q(\xi)$的系数不必是实数). 我们有

$$P_+(\xi, \tau)=\tau-\tau_1(\xi), \quad P_-(\xi, \tau)=\tau-\tau_2(\xi)$$

$$Q_+(\xi, \tau)=\frac{(\tau_1+q)}{(\tau_1-\tau_2)}, \quad Q_-(\xi, \tau)=\frac{(\tau_2+q)}{(\tau_2-\tau_1)}$$

$$\alpha(\xi)=\frac{\pi}{\operatorname{Im}\tau_1}\,\frac{|\tau_1+q|^2}{|\tau_1-\tau_2|^2}$$

$$\beta(\xi)=\frac{-\pi}{\operatorname{Im}\tau_2}\,\frac{|\tau_2+q|^2}{|\tau_2-\tau_1|^2}$$

因此只要几乎处处有$\tau_1+q\neq0$, A^{-1}就几乎处处存在. 这时, (7-81)等价于

$$\frac{|\tau_2+q|^2}{|\operatorname{Im}\tau_2|}\leqslant K_1\frac{|\tau_1+q|^2}{\operatorname{Im}\tau_1} \tag{7-93}$$

因此, 每当(7-93)成立时, 对于每个满足(7-82)的$R(D)$, 我们有

$$\int_0^\infty |R(\xi, D_t)v|^2 dt\leqslant C\Big[\int_0^\infty |P(\xi, D_t)v|^2 dt$$

$$+\frac{|\tau_1-\tau_2|^2\operatorname{Im}\tau_1}{|\tau_1+q|^2}\,|[D_t+q(\xi)]v(\xi, 0)|^2\Big]$$

若$q(\xi)$具有实系数而τ_k是纯虚根, 则(7-93)化为

$$|\tau_2|+\frac{q^2}{|\tau_2|}\leqslant K_1\left(|\tau_1|+\frac{q^2}{|\tau_1|}\right) \tag{7-94}$$

若存在常数K, 使得

$$|\tau_1|\leqslant K|\tau_2| \tag{7-95}$$

而且

$$|\tau_1\tau_2|\leqslant K(q^2+|\tau_1|^2) \tag{7-96}$$

则(7-94)将成立. 另一组能推出(7-94)的条件是

$$q^2 \leqslant K|\tau_1\tau_2| \tag{7-97}$$

$$|\tau_1\tau_2| \leqslant K(q^2+|\tau_1|^2) \tag{7-98}$$

若没有关于 $P(\xi, \tau)$ 的进一步的知识，我们就不能够验证(7-87).

6. $P(\xi, \tau)=(\tau-i|\xi|^4)(\tau+i|\xi|^2)$, $Q(\xi, \tau)=1$, 而 $R(\xi,\tau)=(\tau+i|\xi|^4)\times(\tau-i|\xi|^2)$. 注意 $P(D)$ 是次椭圆算子(见 3-6 节). 还有(7-82)成立(事实上，对于 $(\xi, \tau)\in E^{n+1}$, 我们有 $|R(\xi,\tau)|=|P(\xi,\tau)|$). 但是

$$Q_+(\xi,\tau)=-Q_-(\xi, \tau)=\frac{1}{i|\xi|^4+i|\xi|^2}$$

因此
$$\alpha(\xi)=\frac{\pi|Q_+|^2}{|\xi|^4},\ \beta(\xi)=\frac{\pi|Q_-|^2}{|\xi|^2}$$

这表明(7-81)不成立. 事实上，不等式(7-83)也不成立. 为证明这点，令

$$v(\xi, t)=e^{-t|\xi|^4}-e^{-t|\xi|^2}$$

显然对每个 $\xi\neq0$, $v(\xi, t)\in S(0, \infty)$, 而

$$v(\xi, 0)=0,\ \xi\neq0$$

因此, $Q(\xi, D_t)v(\xi, 0)=0$. 简单的计算就给出

$$(D_t-i|\xi|^2)v=i|\xi|^2(|\xi|^2-1)e^{-t|\xi|^4}$$

和
$$(D_t-i|\xi|^4)v=i|\xi|^2(|\xi|^2-1)e^{-t|\xi|^2}$$

由此,
$$P(\xi,D_t)v=-2|\xi|^4(|\xi|^2-1)e^{-t|\xi|^2}$$

和
$$R(\xi,D_t)v=-2|\xi|^6(|\xi|^2-1)e^{-t|\xi|^4}$$

因此，我们有

$$\int_0^\infty|P(\xi, D_t)v|^2dt=2|\xi|^6(|\xi|^2-1)^2$$

和
$$\int_0^\infty|R(\xi, D_t)v|^2dt=2|\xi|^8(|\xi|^2-1)^2$$

显然，对于 $\xi\in E^n$ 这些表示式的比不可能是有界的.

7-8 非零边界条件

现在我们在定理 7-16 的假设下考虑问题

$$P(D)u(x, t)=f(x, t),\ t>0 \tag{7-99}$$

$$Q_j(D)u(x, 0)=g_j(x),\ 1\leqslant j\leqslant r \tag{7-100}$$

我们假定对于每个 μ 和 k, $D_x^\mu D_t^k f\in L^2(\Omega)$, 而对于每个 μ 和 k, $D_x^\mu g_j\in L^2(E^n)$, $1\leqslant j\leqslant r$. 一个显然的命题是

定理 7-17 假定存在函数 $v(x,t)$, 使得对每个 μ 和 k, $D_x^\mu D_t^k v\in$

$L^2(\Omega)$，并且

$$Q_j(D)v(x,\ 0)=g_j(x),\ \ 1\leqslant j\leqslant r \tag{7-101}$$

则在7-6节假设1—4下，存在一个具有和v同样性质的方程(7-99)，(7-100)的解$u(x,\ t)$.

证明　由定理7-16，存在问题

$$P(D)w(x,\ t)=f(x,\ t)-P(D)v(x,\ t),\ \ t>0 \tag{7-102}$$

$$Q_j(D)w(x,\ 0)=0,\ \ 1\leqslant j\leqslant r \tag{7-103}$$

的一个解$w(x,\ t)$，它具有所要求的性质. 令$u=w+v$，则容易验证u给出了所要的解.

定理7-17使我们自然地要提出如下问题，即何时存在一个满足等式(7-101)的具有所要求的性质的函数$v(x,\ t)$？回答并不象这个问题表面看来的那样困难. 首先，我们有

定理7-18　若$g_1(x),\ \cdots,\ g_r(x)$是使得对于每个μ和j有$D_x^\mu g_j\in L^2(E^n)$的任何函数，则存在一个函数$v(x,\ t)$使得

$$D_t^{j-1}v(x,\ 0)=g_j(x),\ \ 1\leqslant j\leqslant r \tag{7-104}$$

而且对每个μ和k，$D_x^\mu D_t^k v\in L^2(\Omega)$.

证明　设$\zeta(t)$是一个在$t=0$附近等于1的$C_0^\infty(-\infty,\ \infty)$函数. 令

$$v(x,\ t)=\zeta(t)\sum_{k=1}^{r}\frac{(it)^{k-1}g_k(x)}{(k-1)!} \tag{7-105}$$

则在$t=0$附近，我们有

$$D_t^j v(x,\ t)=\sum_{k=j}^{r}\frac{(it)^{k-j-1}g_k(x)}{(k-j-1)!}$$

这就给出了等式(7-104).

现在我们转向一般算子$Q_j(D)$. 设m_j表示$Q_j(D)$的阶数. 如果阶数m_j都不相同而且$Q_j(\xi,\ \tau)$中τ^{m_j}的系数不等于零，则我们将说$Q_1(D),\ \cdots,\ Q_r(D)$这组算子(关于超平面$t=0$)是**正规的**. 这件事可以换一种说法：$Q_j(\xi,\ \tau)$的阶数是不同的，而且超平面$t=0$不是$Q_j(\xi,\ \tau)$中任何一个的特征(见4-1节). 我们有

定理7-19　若$Q_1(D),\ \cdots,\ Q_r(D)$这组算子是正规的，则对于每个μ和j满足$D_x^\mu g_j\in L^2(E^n)$的函数组$g_1(x),\ \cdots,\ g_r(x)$，存在一个

函数 $v(x,\ t)$，使得对于每个 μ 和 k，$D_x^\mu D_t^k v \in L^2(\Omega)$，而且等式(7-101)成立.

证明　设整数 q 使得所有 $Q_j(D)$ 的阶数 $<q$. 设 $(n_1,\ \cdots,\ n_{q-r})$ 是一些数，当把这些数和 $(m_1,\ \cdots,\ m_r)$ 合起来就成为集合 $(0,\ \cdots,\ q-1)$. 若我们令

$$Q_{r+j}(D) = D_t^{n_j},\ 1 \leqslant j \leqslant q-r$$

则容易验证集合 $Q_1(D),\ \cdots,\ Q_q(D)$ 是正规的. 让我们把它们重新排列，使得 $Q_j(D)$ 的阶数是 $j-1$. 因此

$$Q_j(\xi,\ \tau) = \sum_{k=1}^{j} R_{jk}(\xi)\tau^{k-1},\ 1 \leqslant j \leqslant q \tag{7-106}$$

其中 $R_{jk}(\xi)$ 是次数 $\leqslant j-k$ 的 ξ 的多项式，而 $R_{jj}(\xi)=$ 常数 $\neq 0$(这是从正规性的定义推得的). 我们断言，需要证明的一切就是：存在 ξ 的多项式 $S_{kl}(\xi)$，使得 $S_{kl}(\xi)$ 的次数 $\leqslant k-l$，$S_{kk}(\xi)=$ 常数 $\neq 0$，而且

$$\sum_{i=j}^{k} R_{ki}(\xi) S_{ij}(\xi) = \delta_{jk},\ 1 \leqslant j \leqslant k \leqslant q \tag{7-107}$$

因为假定等式(7-106)和(7-107)成立，又假定 $g_1,\ \cdots,\ g_q$ 满足定理的假定. 则由定理 7-18 可知，存在一个具有所要性质的函数 $v(x, t)$，使得

$$D_t^{k-1} v(x,\ 0) = \sum_{l=1}^{k} S_{kl}(D_x) g_l(x),\ 1 \leqslant k \leqslant q$$

因此，由等式(7-106)和(7-107)，

$$\begin{aligned} Q_j(D) v(x,\ 0) &= \sum_{k=1}^{j} R_{jk}(D_x) \sum_{l=1}^{k} S_{kl}(D_x) g_l(x) \\ &= \sum_{l=1}^{j} \left[\sum_{k=l}^{j} R_{jk}(D_x) S_{kl}(D_x) \right] g_l(x) \\ &= g_j(x),\quad 1 \leqslant j \leqslant q \end{aligned}$$

因此，函数 $v(x,\ t)$ 满足的性质要比等式(7-101)多. 所以，剩下只要证明等式(7-107). 我们通过很简单的归纳法来证明它. 对于 $k=1$，(7-107)显然成立. 我们只要取 $S_{11}(\xi)=1/R_{11}(\xi)$. 现在假定(7-107)对于 $k<p\leqslant q$ 成立. 我们应该证明对于 $k=p$，(7-107)也成立. 定义

$$S_{pp}(\xi)=\frac{1}{R_{pp}(\xi)}$$

以及 $$S_{pl}(\xi)=-S_{pp}(\xi)\sum_{k=l}^{p-1}R_{pk}(\xi)S_{kl}(\xi),\quad l<p$$

因此，对于 $j<p$,

$$\sum_{i=j}^{p}R_{pi}(\xi)S_{ij}(\xi)=R_{pp}(\xi)S_{pj}(\xi)+\sum_{i=j}^{p-1}R_{pi}(\xi)S_{ij}(\xi)$$

$$=-\sum_{i=j}^{p-1}R_{pi}(\xi)S_{ij}(\xi)+\sum_{i=j}^{p-1}R_{pi}(\xi)S_{ij}(\xi)=0$$

因此，对于 $k=p$，等式(7-107)同样成立. 证毕.

习 题

7-1 对于由等式(7-14)给出的 g 证明一个与(7-24)相应的恒等式.

7-2 g 同 1，证明一个对 g 的与(7-25)相应的恒等式.

7-3 证明推论 7-8.

7-4 证明等式(7-27).

7-5 证明恒等式(7-38).

7-6 若 A 是复 Hilbert 空间上的一个线性算子而且对于所有的 u，(Au,u) 是实的. 证明 A 是 Hermite 算子.

7-7 若 $A=(\alpha_{jk})$ 而 $A^{-1}=(\alpha^{jk})$，试通过 α_{jk} 来表出 α^{jk}.

7-8 若 $A=(\alpha_{jk})$ 是 Hermite 矩阵，试证明 A^{-1} 也是 Hermite 矩阵.

7-9 试证明等式(7-90)和(7-90a).

7-10 当 $P=a(\tau-i)$ 时，试证明(7-91)蕴含着(7-87).

7-11 当 $P=a(\tau-b)$ 时，试证明(7-91)和(7-92)蕴含着(7-87).

7-12 证明 7-7 节例 3 中的命题.

7-13 证明 7-7 节例 4 中的同样的命题.

7-14 试证明(7-95)和(7-96)蕴含着(7-94).

7-15 试证明(7-97)和(7-98)蕴含着(7-94).

第八章　Dirichlet 问题

8-1　引　　言

设 $P(D)$ 是 E^{n+1} 中一个阶数为 $m=2r$ 的齐次、纯椭圆算子(见 6-9 节)，并考虑问题

$$P(D)u(x,\ t)=f(x,\ t),\ x\in E^n,\ t>0 \tag{8-1}$$

$$D_t^k u(x,\ 0)=g_k(x),\ x\in E^n,\ 0\leqslant k<r \tag{8-2}$$

这是 6-8 节中问题(6-132)，(6-133)的特殊情形．事实上，我们有

$$Q_j(\xi,\ \tau)=\tau^{j-1},\ 1\leqslant j\leqslant r \tag{8-3}$$

注意到 Q_j 满足 6-7 节中定理 6-15 的条件(b)．这是显然的，因为所有的 $Q_j(\xi,\ \tau)$ 的次数都是 $<r(=P_+(\xi,\ \tau)$ 的次数)的，并且它们是线性无关的(见 3-3 节和 6-4 节)．因此，由 6-8 节的定理 6-27，对于每一组其各阶导数都存在且属于 L^2 的函数 f, g_k，方程(8-1)，(8-2)有唯一解．Dirichlet 的名字给加到了这个问题上．

现在我们希望考虑变系数而且不必是齐次的算子的相应的问题．在处理变系数时，从小区域开始是谨慎的．因此，代替半空间，我们将只限于由 $|x|^2+t^2<R^2$, $t>0$ 给出的区域 σ_R．我们的算子的形式将是

$$P(x,\ t,\ D)=\sum_{|\mu|+k\leqslant m}a_{\mu,k}(x,\ t)D_x^\mu D_t^k \tag{8-4}$$

假定系数属于 $C^\infty(\bar{\sigma}_R)$．在 $\bar{\sigma}_R$ 上算子设为椭圆算子并且假定

$$P_0(D)=\sum_{|\mu|+k=m}a_{\mu,k}(0,\ 0)D_x^\mu D_t^k \tag{8-5}$$

是纯椭圆算子．

7-8 节的定理 7-18 证明了：对于选取的任何 g_k，我们总可以找到函数 u 使之满足等式(8-2)．和在定理 7-17 那里的推理一样，我们知道，我们只需要考虑 g_k 等于零的情形．因此，我们的问题

的形式是

$$P(x,\ t,\ D)u(x,\ t)=f(x,\ t),\ (x,\ t)\in\sigma_R \tag{8-6}$$

$$D_t^k u(x,\ 0)=0,\ |x|<R,\ 0\leqslant k<r \tag{8-7}$$

我们愿取$f\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$并希望我们能在$C^m(\bar{\sigma}_R)$中找到一个解．我们将会看到，即使这个要求不太高的问题也需要做一些工作才能解决．

8-2 弱　　解

正如当我们对于一个问题的解决还没有什么线索的时候，象通常做的那样，让我们假定方程(8-6)，(8-7)有一个解，从而来看一下关于f和$P(x,t,D)$蕴含着什么条件．假定$u(x,\ t)\in C^m(\bar{\sigma}_R)$是(8-6)，(8-7)的一个解．我们的第一个本能的行动就是分部积分．设$\partial_0\sigma_R$表示σ_R的包含在超平面$t=0$上的这部分边界，而令$\partial_1\sigma_R$表示σ_R的边界的其余部分(即包含在曲面$|x|^2+t^2=R^2$上的那部分边界)．设$\varphi\in C^m(\bar{\sigma}_R)$是$C^m(\bar{\sigma}_R)$中任一在边界$\partial_1\sigma_R$附近等于零的函数．(做这个假定是为了避免任何在边界$\partial_1\sigma_R$上的积分，因为在$\partial_1\sigma_R$上没有给出u的边界条件．)分部积分，我们有

$$\begin{aligned}(P(x,\ t,\ D)u,\ \varphi)&=\sum_{|\mu|+k\leqslant m}(a_{\mu,k}D_x^\mu D_t^k u,\ \varphi)\\&=\sum_{|\mu|+k\leqslant m}(D_t^k u,\ D_x^\mu[\bar{a}_{\mu,k}\varphi])\\&=\sum_{k=0}^m(D_t^k u,\ \varphi_k)\end{aligned}$$

其中

$$\varphi_k=\sum_{|\mu|\leqslant m-k}D_x^\mu[\bar{a}_{\mu,k}\varphi]$$

因此，由4-2节的等式(4-20)，

$$\begin{aligned}(P(x,\ t,\ D)u,\ \varphi)=&(u,\ P'(x,\ t,\ D)\varphi)\\&-i\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^k\int_{\partial_0\sigma_R}D_t^{j-1}u\,\overline{D_t^{k-j}\varphi_k}\,dx\\=&(u,\ P'(x,\ t,\ D)\varphi)\\&-i\sum_{j=1}^m\int_{\partial_0\sigma_R}D_t^{j-1}u\sum_{k=j}^m\overline{D_t^{k-j}\varphi_k}\,dx\end{aligned} \tag{8-8}$$

其中

$$P'(x,\ t,\ D)\varphi=\sum_{|\mu|+k\leqslant m}D_x^\mu D_t^k[\bar{a}_{\mu,k}\varphi] \tag{8-9}$$

是$P(x,\ t,\ D)$的形式共轭(见1-3节). 因此,我们有

$$(P(x,\ t,\ D)u,\ \varphi)=(u,\ P'(x,\ t,\ D)\varphi)$$

$$-i\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial_0\sigma_R}D_t^{j-1}u\overline{N_j\varphi}dx \tag{8-10}$$

其中

$$N_j\varphi=\sum_{k=0}^{m-j}\sum_{|\mu|\leqslant m-j-k}D_x^\mu D_t^k[\bar{a}_{\mu,j+k}\varphi],\ 1\leqslant j\leqslant m \tag{8-11}$$

若φ还满足

$$D_t^k\varphi(x,\ 0)=0,\ |x|<R,\ 0\leqslant k<r \tag{8-12}$$

则由(8-7)和(8-12),我们有

$$(P(x,\ t,\ D)u,\ \varphi)=(u,\ P'(x,\ t,\ D)\varphi) \tag{8-13}$$

因此,若u满足方程(8-6),则对于所有在$\partial_1\sigma_R$附近等于零并满足(8-12)的$\varphi\in C^m(\bar{\sigma}_R)$,我们有

$$|(f,\ \varphi)|\leqslant C\|P'(x,\ t,\ D)\varphi\| \tag{8-14}$$

因此(8-14)是(8-6), (8-7)有解的必要条件(与1-6节比较).

反过来, 假定(8-14)成立. 由此能否导出解的存在呢? 我们来试试看. 设W是由满足如下条件的函数$\psi(x,\ t)$构成的集合,首先$\psi(x,\ t)$在$\bar{\sigma}_R$上连续,其次存在一个在$\partial_1\sigma_R$附近等于零且满足(8-12)的$\varphi\in C^m(\bar{\sigma}_R)$,使得$\psi$与$\varphi$满足

$$P'(x,\ t,\ D)\varphi=\psi \tag{8-15}$$

令

$$G(\psi)=(\varphi,\ f)$$

就象我们在1-6节中指出过的那样, 只要方程(8-15)成立, $G(\psi)$就不依赖于φ(为此要用到不等式(8-14)). 由(8-14),W被看作$L^2(\sigma_R)$的子空间,$G(\psi)$是W上的一个有界线性泛函. 因为W在$L^2(\sigma_R)$中的闭包$\overline{W}$是一 Hilbert 空间, 从1-5节的定理1-5和1-6我们知道,存在一个$u\in\overline{W}$,满足

$$G(\psi)=(\psi,\ u),\ \psi\in\overline{W}$$

由此

$$(u,\ P'(x,\ t,\ D)\varphi)=(f,\ \varphi) \tag{8-16}$$

对于所有在 $\partial_1\sigma_R$ 附近等于零且满足等式(8-12)的 $\varphi\in C^m(\bar{\sigma}_R)$ 都成立. 与1-6节和4-2节中所用的术语相一致, 我们把 u 称为(8-6), (8-7)的弱解. 为证明这样的命名法是正确的, 我们必须证明, 若 $u\in C^m(\bar{\sigma}_R)$ 并且对事先规定的函数 φ 满足等式(8-16), 则 u 果真是方程(8-6), (8-7)的一个解.

为证明这点, 首先注意到, 对于所有的 $\varphi\in C_0^\infty(\sigma_R)$, u 满足等式(8-16). 分部积分, 我们得到

$$(P(x,\ t,\ D)u-f,\ \varphi)=0,\ \varphi\in C_0^\infty(\sigma_R)$$

这就蕴含着 u 是(8-6)的一个解(见1-3节). 其次, 根据等式(8-10), 我们有

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial_0\sigma_R} D_t^{j-1}u\,\overline{N_j\varphi}\,dx=0 \tag{8-17}$$

对于所有在 $\partial_1\sigma_R$ 附近等于零并且满足等式(8-12)的 $\varphi\in C^m(\bar{\sigma}_R)$ 成立. 考察一下(8-11)就证明了对于这种 φ,

$$N_j\varphi(x,\ 0)=0,\ r<j\leqslant m \tag{8-18}$$

成立. 因此, 等式(8-17)化为对于前面规定的函数 φ 成立的等式

$$\sum_{j=1}^{r}\int_{\partial_0\sigma_R} D_t^{j-1}u\,\overline{N_j\varphi}\,dx=0 \tag{8-19}$$

我们将在8-3节中证明, 对于任何在 $|x|=R$ 附近等于零的函数 $g_1(x),\ \cdots,\ g_r(x)\in C_0^\infty(E^n)$, 存在一个前面规定的类型的函数 φ, 使得

$$N_j\varphi(x,\ 0)=g_j(x),\ |x|<R,\ 1\leqslant j\leqslant r \tag{8-20}$$

(引理8-4). 由这个引理推出对于所有在 $|x|=R$ 附近等于零的 $g_j\in C_0^\infty(E^n)$,

$$\sum_{j=1}^{r}\int_{\partial_0\sigma_R} D_t^{j-1}u\,\bar{g}_j\,dx=0 \tag{8-21}$$

成立. 这就蕴含着 u 满足(8-7)(见4-2节引理4-2). 因此, 术语"弱解"是合适的.

我们把本节的结果总结如下.

定理8-1 问题(8-6), (8-7)有弱解的必要充分条件是不等式(8-14)成立. 属于 $C^m(\bar{\sigma}_R)$ 的弱解是真解.

因此，除非(8-14)成立，解问题(8-6)，(8-7)是没有希望的．所以，我们必须来决定什么时候不等式(8-14)成立．这一点在8-4节中很容易地做到了．将在8-7节着手处理与得到真解有关的进一步的工作．

8-3 正规边界算子

设 $Q_1(x, t, D), \cdots, Q_r(x, t, D)$ 是一组系数属于 $C^\infty(\bar{\sigma}_R)$ 的偏微分算子．如果它们的阶数 m_j 都不相同，并且若在 $Q_j(x,0,D)$ 中 $D_t^{m_j}$ 的系数是一个在 $|x|\leqslant R$ 中不等于零的函数，则我们称这组算子(关于曲面 $t=0$)是正规的(常系数的情形见7-8节)．如果所有的算子的阶数都小于 r，则这组算子称为 r 阶 Dirichlet 组．因为有 r 个算子并且它们的阶数是不相同的，所以阶数 0, 1, $\cdots$, $r-1$ 都可以在这些算子中找到．若有必要的话，通过把这些算子重新排列，我们可以假定 $Q_j(x, t, D)$ 是 $j-1$ 阶的．每当讨论 Dirichlet 组时我们恒作这一个假定．

定理 8-2 若 $Q_1(x, t, D), \cdots, Q_r(x, t, D)$ 是一个 r 阶 Dirichlet 组，则

$$Q_j(x, 0, D)=\sum_{k=1}^{j} \Gamma_{jk}(x, D_x) D_t^{k-1}, \ 1\leqslant j\leqslant r \tag{8-22}$$

并且

$$D_t^{j-1}=\sum_{k=1}^{j} \Lambda_{jk}(x, D_x) Q_k(x, 0, D), \ 1\leqslant j\leqslant r \tag{8-23}$$

其中 Γ_{jk} 和 Λ_{jk} 是系数无穷可微、阶数 $\leqslant j-k$ 的关于变量 x 的偏微分算子．对于每个 j，Γ_{jj} 和 Λ_{jj} 都是在 $|x|\leqslant R$ 上不等于零的函数．还有

$$\sum_{k=l}^{j} \Gamma_{jk}\Lambda_{kl}=\delta_{jl}, \ 1\leqslant l\leqslant j\leqslant r \tag{8-24}$$

和

$$\sum_{k=l}^{j} \Lambda_{jk}\Gamma_{kl}=\delta_{jl}, \ 1\leqslant l\leqslant j\leqslant r \tag{8-25}$$

证明 方程(8-22)是定义的直接推论．我们用归纳法来证明等式

(8-23)到(8-25). 对于 $j=1$ 这些等式确实成立. 假定对于所有的 $j<i\leqslant r$ 它们成立. 由等式(8-22)和归纳假设

$$
\begin{aligned}
Q_i(x,0,D)-\Gamma_{ii}D_t^{i-1}&=\sum_{k=1}^{i-1}\Gamma_{ik}D_t^{k-1}\\
&=\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{k}\Gamma_{ik}\Lambda_{kl}Q_l(x,0,D)\\
&=\sum_{l=1}^{i-1}\left(\sum_{k=l}^{i-1}\Gamma_{ik}\Lambda_{kl}\right)Q_l(x,0,D)
\end{aligned}
$$

我们可以取 $\Lambda_{ii}=1/\Gamma_{ii}$ 并且

$$\Lambda_{il}=-\Lambda_{ii}\sum_{k=l}^{i-1}\Gamma_{ik}\Lambda_{kl},\ 1\leqslant l<i \tag{8-26}$$

这就蕴含着 $j=i$ 的(8-23). 这也蕴含着(8-24)和(8-25). 事实上, 根据归纳法假设我们有

$$\sum_{k=l}^{i}\Gamma_{ik}\Lambda_{kl}=\Gamma_{ii}\Lambda_{il}+\sum_{k=l}^{i-1}\Gamma_{ik}\Lambda_{kl}=\delta_{il}$$

以及

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=l}^{i}\Lambda_{ik}\Gamma_{kl}&=\Lambda_{ii}\Gamma_{il}+\sum_{k=l}^{i-1}\Lambda_{ik}\Gamma_{kl}\\
&=\Lambda_{ii}\Gamma_{il}-\Lambda_{ii}\sum_{k=l}^{i-1}\sum_{j=k}^{i-1}\Gamma_{ij}\Lambda_{jk}\Gamma_{kl}\\
&=\Lambda_{ii}\Gamma_{il}-\Lambda_{ii}\sum_{j=l}^{i-1}\Gamma_{ij}\sum_{k=l}^{j}\Lambda_{jk}\Gamma_{kl}=\delta_{il}.
\end{aligned}
$$

这就完成了证明.

推论 8-3 若 $Q_1'(x,t,D),\cdots,Q_r'(x,t,D)$是任何别的 r 阶 Dirichlet 组, 则

$$Q_j'(x,0,D)=\sum_{k=1}^{j}\Theta_{jk}(x,D_x)Q_k(x,0,D),\ 1\leqslant j\leqslant r \tag{8-27}$$

其中 Θ_{jk} 是一个阶数 $\leqslant j-k$ 的偏微分算子而 Θ_{jj} 是一个非零函数.

证明 由定理 8-2, 存在算子 Γ'_{jk} 和 Λ'_{jk}, 它们关于 Q_j' 的性态和算子 Γ_{jk} 和 Λ_{jk} 关于 Q_j 的性态一样. 因此

$$Q'_j(x,\ 0,\ D)=\sum_{k=1}^{j}\Gamma'_{jk}D_t^{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{j}\Gamma'_{jk}\sum_{i=1}^{k}\Lambda_{ki}Q_i(x,\ 0,\ D)$$

$$=\sum_{i=1}^{j}\Big(\sum_{k=i}^{j}\Gamma'_{jk}\Lambda_{ki}\Big)Q_j(x,\ 0,\ D)$$

容易验证这就是所要的形式.

引理 8-4 若 $Q_1(x,\ t,\ D),\ \cdots,\ Q_r(x,\ t,\ D)$ 是一个 r 阶 Dirichlet 组, 而 $g_1(x),\ \cdots,\ g_r(x)$ 是 $|x|<R$ 中无穷次可微、在 $|x|=R$ 附近等于零的任意函数, 则存在一个在 $\partial_1\sigma_R$ 附近等于零的函数 $v\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$, 它满足

$$Q_j(x,\ 0,\ D)v(x,\ 0)=g_j(x),\ 1\leqslant j\leqslant r \tag{8-28}$$

证明 由定理 8-2, 只要找到一个在 $\partial_1\sigma_R$ 附近等于零的函数 $v\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$, 并且满足

$$D_t^{j-1}v(x,\ 0)=\sum_{k=1}^{j}\Lambda_{jk}g_k(x)=h_j(x),\ 1\leqslant j\leqslant k \tag{8-29}$$

就够了. 现在, 存在 $R_1<R$ 使得对于 $|x|\geqslant R_1$, 所有的 $g_k(x)$ 等于零. 设 $\delta>0$ 是如此之小, 以致柱体 $|x|\leqslant R_1,\ 0\leqslant t\leqslant\delta$ 包含在 σ_R 中. 设 $\zeta(t)$ 是在 $t=0$ 附近等于 1 的 $C_0^\infty(-\delta,\ \delta)$ 中的一个函数. 若我们现在令

$$v(x,\ t)=\zeta(t)\sum_{k=1}^{r}\frac{(it)^{k-1}h_k(x)}{(k-1)!} \tag{8-30}$$

我们就得到一个具有所要性质的函数.

8-2 节末所作的命题, 即方程 (8-20) 有一个属于所要求的类型的解, 可以从引理 8-4 和由等式(8-11)给出的集合 $N_1,\ \cdots,\ N_r$ 是一个 Dirichlet 组这个事实推出.

本节的结果属于 Aronszajn-Milgram(1953).

8-4 估 计

现在我们来研究什么时候对于 8-2 节中所描述的 φ, 不等式

(8–14)成立．我们更详细地来考查这个不等式．

设 $\mathscr{D}_R$ 是由在 $\partial_1\sigma_R$ 附近等于零并且满足等式(8–12)的那些函数 $\varphi\in C^m(\bar{\sigma}_R)$ 构成的集合．在 σ_R 外把它们定义为零，又设 H_R 是 $\mathscr{D}_R$ 关于范数 $|\ \ |_{m,0}$ 的完备化(见6–7节等式(6–128))．若 $R(x,t,D)$ 是任何阶数 $\leqslant m$、在 σ_R 上系数有界的算子，我们可以延拓 $R(x,t,D)$ 的定义，使之可以作用到 H_R 中的函数上去．这可以借助于不等式

$$\|R(x,t,D)\varphi\|\leqslant C|\varphi|_{m,0},\quad \varphi\in\mathscr{D}_R \tag{8-31}$$

来完成．(8–31)将在本节后面得到证明．事实上，若 u 是 H_R 中任一函数，则存在一个 $\mathscr{D}_R$ 中的函数序列 $\{\varphi_k\}$，它在 H_R 中收敛到 u．由(8–31)，序列 $\{R(x,t,D)\varphi_k\}$ 在 $L^2(\sigma_R)$ 中收敛到一个函数 w．我们把 $R(x,t,D)u$ 就定义为 w．为证明这样定义是有意义的，我们必须证明其结果不依赖于特殊的序列 $\{\varphi_k\}$ 的选取．情形确实如此．因为，若 $\{\psi_k\}$ 是 $\mathscr{D}_R$ 中的另一个函数序列它在 H_R 中收敛到 u，则由(8–31)，

$$\|R(x,t,D)[\varphi_k-\psi_k]\|\leqslant C|\varphi_k-\psi_k|_{m,0}\to 0$$

因此，在 $L^2(\sigma_R)$ 中同样有 $R(x,t,D)\psi_k\to w$．注意，$H_R\subset L^2(\sigma_R)$．

其次，我们注意到(8–31)蕴含着

$$\|R(x,t,D)v\|\leqslant C|v|_{m,0},\quad v\in H_R \tag{8-32}$$

因为若 $\{\varphi_k\}$ 是 $\mathscr{D}_R$ 中的一个函数序列，它在 H_R 中收敛到 v，则由(8–31)，有

$$\|R(x,t,D)\varphi_k\|\leqslant C|\varphi_k|_{m,0}$$

令 $k\to\infty$ 取极限，我们得到(8–32)．类似地，同样的推理证明了(8–14)等价于

$$|(f,v)|\leqslant C\|P'(x,t,D)v\|,\quad v\in H_R \tag{8-33}$$

设 N'_R 是由满足

$$P'(x,t,D)v=0 \tag{8-34}$$

的那些 $v\in H_R$ 构成的集合．从(8–33)我们看到，为使(8–14)成立，必须 $(f,N'_R)=0$(或简写为 $f\perp N'_R$)．我们来考察一下这个集合．

显然，N'_R 是 $L^2(\sigma_R)$ 的一个子空间. 我们将在8–6节中证明:

定理 8–5 对于充分小的 R，N'_R 是有限维的.

由此推出 N'_R 是 $L^2(\sigma_R)$的闭子空间(见 7–4 节). 作为一个推论，我们有

引理 8–6 若 $f\perp N'_R$ 并且

$$|(f,\ v)|\leqslant C\|P'(x,\ t,\ D)v\|,\ v\in H_R,\ v\perp N'_R \tag{8-35}$$

则(8–33)成立.

证明 若 $v\in H_R$，则 $v=v_1+v_2$，其中 $v_2\in N'_R$ 而在 $L^2(\sigma_R)$ 中 $v_1\perp N'_R$(1–5 节定理 1–3). 因为 v 和 v_2 都属于 H_R，所以 v_1 也属于 H_R. 因此，若 $f\perp N'_R$ 且(8–35)成立，我们有

$$\begin{aligned}|(f,\ v)|=|(f,\ v_1)|&\leqslant C\|P'(x,\ t,\ D)v_1\|\\&=C\|P'(x,\ t,\ D)v\|\end{aligned}$$

这正好就是(8–33).

推论 8–7 若

$$\|v\|\leqslant C\|P'(x,\ t,\ D)v\|,\ v\in H_R,\ v\perp N'_R \tag{8-36}$$

则对于每个 $f\perp N'_R$，(8–33)成立.

从推论 8–7 我们看到，若要对每个 $f\perp N'_R$，(8–14)成立的话，我们就应该证明(8–36)成立. 为此，我们利用

定理 8–8 在 8–1 节中所述的假设下，存在常数 $R>0$ 和 C，使得

$$|\varphi|_{m,0}\leqslant C(\|P'(x,\ t,\ D)\varphi\|+\|\varphi\|),\ \varphi\in\mathscr{D}_R \tag{8-37}$$

还要利用

引理 8–9 若 $\{u_k\}$ 是 H_R 中的函数序列，使得

$$|u_k|_{m,0}\leqslant K$$

则它有一个在 $L^2(\sigma_R)$中收敛的子序列.

如同我们在前面指出过的那样，(8–37)蕴含着

$$|v|_{m,0}\leqslant C(\|P'(x,\ t,\ D)v\|+\|v\|),\ v\in H_R \tag{8-38}$$

我们将在本节末证明定理 8–8 而在 8–6 节中证明引理 8–9. 现在我们利用定理 8–8 和引理 8–9 来证明

定理 8–10 在 8–1 节的假设下，存在常数 $R>0$ 和 C，使得

$$|v|_{m,0} \leqslant C\|P'(x,\ t,\ D)v\|,\ v \in H_R,\ v \perp N'_R \tag{8-39}$$

证明　假定(8-39)不成立. 则在 H_R 中就应该有一个函数序列 $\{v_k\}$, 它满足 $(v_k,\ N'_R)=0$, 并且

$$|v_k|_{m,0}=1,\ \|P'(x,\ t,\ D)v_k\| \to 0 \tag{8-40}$$

由引理 8-9, 存在一个在 $L^2(\sigma_R)$ 中收敛的子序列. 我们只对这个子序列有兴趣. 因此, 我们可以假定所有其它的项都已扔掉, 从而整个序列在 $L^2(\sigma_R)$ 中收敛. 由不等式(8-38),

$$|v_j - v_k|_{m,0} \leqslant C(\|P'(x,\ t,\ D)[v_j - v_k]\| + \|v_j - v_k\|) \to 0$$

因此 v_k 在 H_R 中收敛到一个函数 $v \in H_R$. 因为每一个函数 v_k 与 N'_R 正交, 因此 v 也与 N'_R 正交. 由(8-32)

$$\|P'(x,\ t,\ D)[v - v_k]\| \leqslant C|v_j - v_k|_{m,0} \to 0$$

因此 $P'(x,\ t,\ D)v=0$. 这就意味着 $v \in N'_R$. 仅当 $v=0$ 时才会发生这种情形. 但是

$$|v|_{m,0} = \lim |v_k|_{m,0} = 1$$

这个矛盾就证明了(8-39).

推论 8-11　在 8-1 节的假设下, 存在常数 $R>0$ 和 C, 使得对于每个 $f \perp N'_R$, (8-33)成立.

证明　把推论 8-7 和定理 8-10 结合起来.

推论 8-12　存在 $R_0>0$, 使得每当 $R \leqslant R_0$ 时, 对于每个 $f \perp N'_R$, 方程(8-6), (8-7)有一个弱解.

证明　由定理 8-8, 存在常数 $R>0$, 对此 R, (8-37)成立. 注意到对于任何 $R_1<R$, $\mathscr{D}_R$ 包含 $\mathscr{D}_{R_1}$. 因此, 对于任何更小的 R 值, (8-37)也成立. 这就蕴含着对于任何更小的 R 值(8-39)成立, 从而(由于(8-33))这就蕴含着对于每个更小的 R 值以及对于每个 $f \perp N'_R$, 方程(8-6), (8-7)有一个弱解.

现在我们来给出早先答应过的应在本节末给出的那些证明. 不等式(8-31)是

$$\sum_{|\mu|+k \leqslant m} \|D_x^\mu D_t^k \varphi\| \leqslant C_0 |\varphi|_{m,0},\ \varphi \in \mathscr{D}_R \tag{8-41}$$

和 $R(x,\ t,\ D)$ 的系数是有界的这一事实的推论. 为证明(8-41),

注意到由于 Parseval 恒等式(2-24)和 6-7 节的等式 (6-128), 对于 $|\mu|+k\leqslant m$, 有

$$\|D_x^\mu D_t^k\varphi\|^2=(2\pi)^{-n}\iint_0^\infty|\xi^\mu D_t^kF\varphi(\xi, t)|^2d\xi\,dt$$

$$\leqslant C\iint_0^\infty|\xi|^{2|\mu|}|D_t^kF\varphi(\xi, t)|^2d\xi\,dt\leqslant C|\varphi|_{m,0}^2$$

这就给出了(8-41). 注意到常数 C_0 不依赖于 R.

我们还给出

定理 8-8 的证明　我们参考 6-7 节的定理 6-26. 因为 $P(x, t, D)$ 的系数属于 $C^\infty(\bar{\sigma}_R)$, 我们有

$$P'(x, t, D)\varphi=\sum D_x^\mu D_t^k[\bar{a}_{\mu,k}(x, t)\varphi]$$

$$=\sum b_{\mu,k}(x, t)D_x^\mu D_t^k\varphi \tag{8-42}$$

其中 $b_{\mu,k}$ 属于 $C^\infty(\bar{\sigma}_R)$. 注意到

$$b_{\mu,k}(x, t)=\bar{a}_{\mu,k}(x, t), \quad |\mu|+k=m \tag{8-43}$$

因此, $P'(x, t, D)$ 在 $\bar{\sigma}_R$ 中是椭圆型的, 而且

$$P_1(D)=\sum b_{\mu,k}(0, 0)D_x^\mu D_t^k \tag{8-44}$$

是纯椭圆算子. 令

$$c_{\mu,k}(x, t)=b_{\mu,k}(x, t)-b_{\mu,k}(0, 0), \quad |\mu|+k\leqslant m$$

以及

$$R_1(x, t, D)=\sum c_{\mu,k}(x, t)D_x^\mu D_t^k$$

则

$$P'(x, t, D)=P_1(D)+R_1(x, t, D) \tag{8-45}$$

而 $R_1(x, t, D)$ 的系数在原点等于零. 因为 $P_1(D)$ 是纯椭圆型的以及由等式(8-3)给出的算子满足 6-7 节中定理 6-15 的假设(b), 所以我们知道存在常数 C_1, 使得

$$|\varphi|_{m,0}\leqslant C_1(\|P_1(D)\varphi\|+\|\varphi\|), \quad \varphi\in\mathscr{D}_R \tag{8-46}$$

而且, 我们知道存在与 R 无关的常数 C_0, 使得(8-41)成立. 因为 $c_{\mu,k}(x, t)$ 在原点等于零, 我们可以把 $R>0$ 取得很小, 使

$$|c_{\mu,k}(x, t)|\leqslant\frac{1}{2C_0C_1}, \quad |\mu|+k\leqslant m$$

因此

$$\|R_1(x,\ t,\ D)\varphi\| \leqslant \frac{|\varphi|_{m,0}}{2C_1},\ \varphi \in \mathscr{D}_R \tag{8-47}$$

把(8-46)和(8-47)结合起来，我们有

$$|\varphi|_{m,0} \leqslant C_1(\|P'(x,\ t,\ D)\varphi\| + \|\varphi\|) + \frac{1}{2}\ |\varphi|_{m,0}$$

这就给出了所要的不等式. 定理 8-8 证毕.

因为 $P'(x,\ t,\ D)$ 是椭圆型的，当且仅当 $P(x,\ t,\ D)$ 是椭圆型的，$P'(0,\ 0,\ D)$ 是纯椭圆型的，当且仅当 $P(0,\ 0,\ D)$ 是纯椭圆型的，而且 $P'(x,\ t,\ D)$ 的形式共轭是 $P(x,\ t,\ D)$，所以我们有下面的定理 8-8 的直接的推论.

定理 8-13 在 8-1 节的假设下，存在常数 $R>0$ 和 C，使得

$$|\varphi|_{m,0} \leqslant C(\|P(x,\ t,\ D)\varphi\| + \|\varphi\|),\ \varphi \in \mathscr{D}_R \tag{8-48}$$

当然对定理 8-8 给出的证明同样可以应用到定理 8-13 上去.

8-5 紧 算 子

设 H_1, H_2 是 Hilbert 空间. 定义在整个 H_1 上的从 H_1 到 H_2 的线性算子 T 称为紧的，如果对于 H_1 中的每个元素序列 $\{x_k\}$，只要 x_k 满足

$$\|x_k\| \leqslant C \tag{8-49}$$

就存在 $\{x_k\}$ 的子序列 $\{y_j\}$，使得 $\{Ty_j\}$ 在 H_2 中收敛. 容易证明，若 T_1 和 T_2 是紧算子，则对于每个 α_1 和 α_2, $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$ 也是紧算子. 我们需要下面的关于紧算子的结果.

引理 8-14 紧算子是有界的.

证明　若 T 不是有界算子，则存在序列 $\{x_k\}$，使得

$$\|x_k\| = 1,\ \|Tx_k\| \to \infty,\ k \to \infty \tag{8-50}$$

因此，序列 $\{Tx_k\}$ 不可能有收敛子序列. 因此，T 不可能是紧的.

定理 8-15 一个处处定义的从 H_1 到 H_2 的算子 T，T 是紧算子，当且仅当对于每个弱收敛于 0 的序列 $\{x_k\}$，

$$\|Tx_k\| \to 0.$$

证明 假设 T 是紧算子而且 $\{x_k\}$ 弱收敛于 0. 假设存在 $\{x_k\}$ 的一个子序列 $\{z_n\}$ 和 $\varepsilon>0$, 使得

$$\|Tz_n\|\geqslant\varepsilon,\ n=1,\ 2,\ \cdots \tag{8-51}$$

由 1-5 节的推论 1-11 可知, 存在常数 C, 使得不等式(8-49)成立. 因此, 由紧性的定义, 存在 $\{z_n\}$ 的子序列 $\{y_j\}$, 使得 Ty_j 在 H_2 中收敛到一个元素 w. 由引理 8-14, 对于所有的 $y\in H_1$ 有 $|(Ty,w)|\leqslant C\|y\|$. 因此 $(Ty,\ w)$ 是 H_1 上的有界线性泛函. 这就蕴含着存在一个元素 $T^*w\in H_2$, 使得

$$(Ty,\ w)=(y,\ T^*w),\ y\in H_1$$

(1-5 节定理 1-5). 特别

$$(Ty_j,\ w)=(y_j,\ T^*w),\ j=1,\ 2,\ \cdots$$

因为当 $j\to\infty$ 时 $Ty_j\to w$ 以及 y_j 弱收敛到 0, 所以

$$(w,\ w)=0$$

因此 $w=0$. 但是由(8-51), 我们有 $\|w\|\geqslant\varepsilon$. 这个矛盾证明了不可能存在满足(8-51)的子序列 $\{z_n\}$. 这意思就是说 $\|Tx_k\|\to0$.

反之, 假定 T 具有定理所述的性质, 又设 $\{x_k\}$ 是满足(8-49)的一个序列. 由 1-5 节的定理 1-8, 存在 $\{x_k\}$ 的子序列 $\{y_j\}$, 它弱收敛到某个元素 $y\in H_1$. 令 $z_j=y_j-y$. 则 z_j 弱收敛到 0, 因此存在 $\{z_j\}$ 的子序列 $\{u_n\}$, 使得 $\|Tu_n\|\to0$. 因此, 若 $v_n=u_n+y$, 则 $\{v_n\}$ 是 $\{x_k\}$ 的一个子序列且 $\{Tv_n\}$ 在 H_2 中收敛到 Ty. 因此 T 是紧算子. 证毕.

Hilbert 空间的一个子集合 B 称为**全有界的**, 如果对于每个 $\varepsilon>0$, 存在 B 的一个有限子集 G, 使得 B 中的每个元素与 G 中的某个元素的距离小于 ε. 另一种说法是, 对于每个 $\varepsilon>0$, 存在 B 的元素 $x_1,\ \cdots,\ x_n$, 使得 B 包含在以 x_k 为中心半径为 ε 的球的并集之中.

定理 8-16 设 B 是 Hilbert 空间 H 的全有界子集合, 又设 $\{x_k\}$ 是 H 中满足(8-49)的元素序列, 并使得对于每个 $y\in B$,

$$(x_k,\ y)\to0,\ \text{当}\ k\to\infty\ \text{时} \tag{8-52}$$

则收敛是一致的. 因此, 对于每个 $\varepsilon>0$, 存在与 y 无关的 N, 使得

$$|(x_k, y)| < \varepsilon, \text{当 } k > N, \ y \in B \text{ 时}$$

证明　设给定 $\varepsilon > 0$. 因为 B 是全有界的，所以存在元素 $y_1, \cdots, y_n$ 使得 B 的每个元素距某个 y_j 不超过 $\varepsilon/2C$, 设 N 如此之大，以致使

$$|(x_k, y_j)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ k > N, \ 1 \leqslant j \leqslant n$$

设 y 是 B 的任一元素，则存在一个 y_j, 使得

$$\|y - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

因此，对于 $k > N$,

$$|(x_k, y)| \leqslant |(x_k, y - y_j)| + |(x_k, y_j)|$$

$$\leqslant \|x_k\| \|y - y_j\| + |(x_k, y_j)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因为 N 与 y 无关.　　　　证毕.

我们还将利用

定理 8-17　若 H 是一个 Hilbert 空间，使得每个满足(8-49)的序列有一个收敛的子序列，则 H 是有限维的.

证明　假设 H 是无限维的. 设 e_1 是一单位向量(即 e_1 的范数为 1), 又设 V_1 是由 e_1 张成的子空间(即所有形为 αe_1 的向量，α 是一纯量). 因为 V_1 是有限维的(3-3 节引理 3-7), 所以它是闭的(7-4 节引理 7-12), 并且不是整个 H. 因此，由 1-5 节的推论 1-14, 存在一个向量 $e_2 \neq 0$, 使得 $(e_2, V_1) = 0$. 我们可以取 e_2 为单位向量. 设 V_2 是由 e_1 和 e_2 张成的子空间(即由所有形为 $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ 的向量构成的集合). V_2 仍然是有限维的，所以是闭的，但不是整个 H. 因此，存在一个单位向量 e_3, 使得 $(e_3, V_2) = 0$. 继续这样做下去，我们得到向量序列 $\{e_k\}$, 使得

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \cdots$$

(这种序列称为标准正交序列). 该序列是一无限序列，因为由前 n 个这样的向量张成的子空间 V_n 是有限维的，因此，是闭的，但不是整个 H. 这个序列 $\{e_k\}$ 满足 (8-49), 但是它没有收敛的子序列. 事实上，对于 $j \neq k$, 我们有

$$\|e_j-e_k\|^2=\|e_j\|^2-2\mathrm{Re}(e_j,\ e_k)+\|e_k\|^2=2$$

这个矛盾证明了 H 一定是有限维的.

8-6 紧 嵌 入

现在我们来证明我们一直在用的函数空间中的某些算子是紧算子. 我们的第一个结果是

定理 8-18 设 φ 是 C_0^∞ 中的函数. 假定 $s>0$ 且存在 H^s 中的元素序列 $\{v_k\}$, 使得

$$|v_k|_s\leqslant C,\quad k=1,\ 2,\ \cdots \tag{8-53}$$

则对于满足 $0\leqslant t<s$ 的每个 t, 存在 $\{v_k\}$ 的一个子序列 $\{u_j\}$, 使得 $\{\varphi u_j\}$ 在 H^t 中收敛.

证明　定理指出了由

$$Tv=\varphi v,\ v\in H^s \tag{8-54}$$

定义的算子 T 是从 H^s 到 H^t 的紧算子(见 8-5 节), 由定理 8-15, 只要证明

$$(v_k,\ h)_s\to 0,\ 当\ k\to\infty\ 时, h\in H^s \tag{8-55}$$

蕴含着

$$|Tv_k|_t\to 0,\ 当\ k\to\infty\ 时 \tag{8-56}$$

就够了.

我们首先注意到(8-55)蕴含着

$$(Fv_k,\ w)\to 0,\ 当\ k\to\infty\ 时, w\in S \tag{8-57}$$

事实上, 若 $w\in S$, 且令 $h=F^{-1}[w/(1+|\xi|)^{2s}]$, 则 $h\in S$ 并且有(8-55)蕴含着(8-57). 其次我们看出(8-55)还蕴含着存在一个常数 C, 使得(8-53)成立(1-5 节推论 1-11). 因此, 由 3-2 节的引理 3-4, 存在一个常数 C_1, 使得

$$|\varphi v_k|_s\leqslant C_1 \tag{8-58}$$

对于 $\eta\in E^n$, 令

$$w_\eta(\xi)=\overline{F\varphi(\eta-\xi)}$$

于是，对于每个 η，函数 w_η 属于 S，并且由(8-57)

$$(Fv_k,\ w_\eta)\to 0,\ \text{当}\ k\to\infty\ \text{时}$$

由 2-5 节的定理 2-10，这等价于

$$F(\varphi v_k)\to 0,\ \text{当}\ k\to\infty\ \text{时，对每个}\ \xi \tag{8-59}$$

于是，对任一 $R>0$，

$$\begin{aligned}|\varphi v_k|_t^2 &= \left(\int_{|\xi|>R}+\int_{|\xi|<R}\right)(1+|\xi|)^{2t}|F[\varphi v_k]|^2 d\xi\\ &\leqslant (1+R)^{2(t-s)}\int_{|\xi|>R}(1+|\xi|)^{2s}|F[\varphi v_k]|^2 d\xi\\ &\quad+\int_{|\xi|<R}(1+|\xi|)^{2t}|F[\varphi v_k]|^2 d\xi\\ &\leqslant C_1(1+R)^{2(t-s)}+\int_{|\xi|<R}(1+|\xi|)^{2t}|F[\varphi v_k]|^2 d\xi\end{aligned}$$

当 $R\to\infty$ 时第一项趋于 0，因此，可以使之要多小就可以多小．若给定 $\varepsilon>0$，我们可取 R 充分大，使第一项 $<\varepsilon/2$．一旦 R 取定，我们希望当 $k\to\infty$ 时第二项趋于零．我们知道由于(8-59)，对于每个固定的 ξ，被积函数趋于零．但是，这并不总能推出积分收敛．为此，若能知道收敛是一致的，那就方便了．积分的收敛性就可由此推出．从而也就证明了定理．

很幸运，帮手就在手边．对于 $|\eta|\leqslant R<\infty$，集合 $\{w_\eta\}$ 在 L^2 中是全有界的（见 8-5 节）．事实上，由于 Parseval 恒等式，2-3 节的(2-24)和 2-5 节的(2-66)，我们有

$$\begin{aligned}\|w_\eta-w_\zeta\|^2 &= \int|F\varphi(\eta-\xi)-F\varphi(\zeta-\xi)|^2 d\xi\\ &= \int|F\varphi(\eta-\zeta+z)-F\varphi(z)|^2 dz\\ &= \int|F[\varphi e^{-i(\eta-\zeta)x}-\varphi]|^2 d\xi\\ &= \int|\varphi(x)|^2|e^{-i(\eta-\zeta)x}-1|^2 dx\\ &\leqslant |\eta-\zeta|^2\int|\varphi(x)|^2|x|^2 dx\end{aligned}$$

显然，对于每个 $\delta>0$，存在有限个点 $\eta^{(1)}$，…，$\eta^{(m)}$，使得球

$$|\eta-\eta^{(j)}|<\frac{\delta}{\||x|\varphi\|},\ 1\leqslant j\leqslant m \tag{8-60}$$

盖住了集合 $|\eta|<R$. 这就证明了对于 $|\eta|\leqslant R$, 集合 $\{w_\eta\}$ 是全有界的. 现在我们可以应用定理 8-16 来推出结论: 在 $|\xi|\leqslant R$ 中, (8-59) 中的收敛性是一致的. 这就完成了证明.

在我们继续下去之前, 我们将叙述并证明两个引理.

引理 8-19 假定 $m\geqslant 0$, 而 $u\in C^m(E^n)$, 能使

$$D^\mu u\in L^2(E^n), \text{对于 } |\mu|\leqslant m \tag{8-61}$$

且有

$$\text{对于每个 } k,\ |x|^k u(x) \text{ 在 } E^n \text{ 中是有界的} \tag{8-62}$$

则

1. 对于每个 $\varepsilon>0$, $J_\varepsilon u\in S$
2. 对于 $0\leqslant k\leqslant m$, $|u|_k<\infty$
3. $|J_\varepsilon u|_k\leqslant|u|_k$, $0\leqslant k\leqslant m$
4. $u\in H^m$

证明 显然 $J_\varepsilon u\in C^\infty(E^n)$. 于是

$$|D^\mu J_\varepsilon u|=\left|\int D^\mu j_\varepsilon(x-y)u(y)dy\right|$$

$$\leqslant\int|D^\mu j_\varepsilon(z)|dz\cdot\max_{|x-y|\leqslant\varepsilon}|u(y)|$$

$$\leqslant K_{\varepsilon,\mu,k}\max_{|x-y|\leqslant\varepsilon}\frac{1}{|y|^k}$$

其中 $K_{\varepsilon,\mu,k}$ 依赖于 ε, μ 和 k. 若我们取 $2\varepsilon\leqslant|x|$, 这就给出

$$|D^\mu J_\varepsilon u|\leqslant\frac{2^k K_{\varepsilon,\mu,k}}{|x|^k}$$

这就证明了 $J_\varepsilon u\in S$. 其次注意到 (8-61) 蕴含着对于 $|\mu|\leqslant m$, $\xi^\mu Fu\in L^2(E^n)$ (见 2-3 节等式 (2-22)). 因此, 对每个 k, $(1+|\xi|)^k\times Fu\in L^2(E^n)$. 这就证明了 2. 为了证明 3, 注意到在 6-8 节中所做的

$$F(J_\varepsilon u)=Fj_\varepsilon Fu \tag{8-63}$$

由 2-5 节的等式 (2-62), (8-63) 蕴含着

$$|F(J_\varepsilon u)|\leqslant|Fu|$$

这就蕴含着 3. 最后，我们注意到，因为 $|J_\varepsilon u|_m$ 是一致有界的，所以存在收敛于 0 的序列 $\{\varepsilon_k\}$，使得函数 $J_{\varepsilon_k}u$ 的算术平均在 H^m 中收敛(1–5 节定理 1–9). 因为 $J_\varepsilon u$ 在 $L^2(E^n)$ 中收敛到 u(2–2 节定理 2–3)，该极限必须几乎处处等于 u. 因为每个 $J_\varepsilon u$ 属于 S，我们证明了 $u\in H^m$. 证毕.

和通常做的那样，我们用 Ω 来表示 E^{n+1} 中的半空间 $t>0$.

引理 8–20 对于每个整数 $m\geqslant 0$，存在从 $H^{m,0}(\Omega)$ 到 $H^m(E^{n+1})$ 的一个有界线性映射 L，使得

$$Lu=u,\ \text{在}\ \Omega\ \text{中} \tag{8–64}$$

几乎处处成立. 而且，对于 $0\leqslant k\leqslant m$，L 是从 $H^{k,0}(\Omega)$ 到 $H^k(E^{n+1})$ 的有界映射.

证明 对于 $u\in S(\Omega)$，定义

$$\begin{aligned} Lu(x,\ t)&=u(x,\ t), \qquad\qquad t>0,\ x\in E^n \\ &=\sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k u(x,\ -kt),\ t<0,\ x\in E^n \end{aligned} \tag{8–65}$$

其中常数 λ_k 满足

$$\sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k(-k)^j=1,\ 0\leqslant j\leqslant m \tag{8–66}$$

容易验证这样的常数是存在的. 而且，等式(8–66)保证了 Lu 的直到 m 阶的导数在穿过 $t=0$ 时是连续的. 因此，Lu 属于 $C^m(E^{n+1})$. 因为 $u\in S(\Omega)$，从引理 8–19 推出 $u\in H^m(E^{n+1})$.

于是

$$|Lu|_k^2=\iint(1+[|\xi|^2+\tau^2]^{1/2})^{2k}|F\widetilde{Lu}(\xi,\ \tau)|^2d\xi\,d\tau$$

其中 F 是关于变量 $x\in E^n$ 的 Fourier 变换，而 $\tilde{h}$ 是关于 t 的 Fourier 变换. 存在只依赖于 n 和 k 的常数 C，使得

$$(1+|\xi|+|\tau|)^{2k}\leqslant C\sum_{j=0}^{k}(1+|\xi|)^{2(k-j)}\tau^{2j} \tag{8–67}$$

由此，由 7–2 节的推论 7–6 和 Parseval 恒等式(2–24)，对于 $k\leqslant m$，有

$$|Lu|_k^2 \leqslant C \sum_{j=0}^{k} \iint (1+|\xi|)^{2(k-j)} |D_\tau^j F Lu(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau$$

$$= C \sum_{j=0}^{k} \iint (1+|\xi|)^{2(k-j)} |D_t^j F Lu(\xi, t)|^2 d\xi dt \tag{8-68}$$

现在,我们注意到,对于 $q \geqslant 1$,

$$\int ds \int_{-\infty}^{0} (1+|\xi|)^{2(k-j)} |D_t^j F u(\xi, -qt)|^2 dt$$

$$= q^{2j-1} \int ds \int_0^\infty (1+|\xi|)^{2(k-j)} |D_s^j F u(\xi, s)|^2 ds$$

$$\leqslant q^{2j-1} |u|_{k,0}^2$$

(见 6–7 节等式(6–128)). 把它和(8–68)结合起来就给出

$$|Lu|_k \leqslant C |u|_{k,0}, \quad 0 \leqslant k \leqslant m \tag{8-69}$$

其中常数只依赖于 k, m 和 n. 现在利用(8–69)和 $S(\Omega)$ 在 $H^{m,0}(\Omega)$ 中稠密这一事实(见 8–1 节),我们可以把 L 延拓到整个 $H^{m,0}(\Omega)$. 这就完成了证明.

引理 8–21 对于每个 $k \geqslant 0$, 存在常数 C, 使得

$$|v|_{k,0} \leqslant C |v|_k, \quad v \in S(E^{n+1}) \tag{8-70}$$

因此,每个 $v \in H^k(E^{n+1})$ 在 Ω 上的限制属于 $H^{k,0}(\Omega)$, 从而(8–70)对这样的 v 成立.

证明 由 6–7 节的等式(6–128),

$$|v|_{k,0}^2 = \sum_{j=0}^{k} \int d\xi \int_0^\infty (1+|\xi|)^{2(k-j)} |D_t^j F v(\xi, t)|^2 dt$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{k} \int d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|)^{2(k-j)} |D_t^j F v(\xi, t)|^2 dt$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \int d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|)^{2k-j} \tau^{2j} |\widetilde{Fv}(\xi, \tau)|^2 d\tau$$

$$\leqslant C \int d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (1+[|\xi|^2+\tau^2]^{1/2})^{2k} |\widetilde{Fv}(\xi, \tau)|^2 d\tau$$

$$= C |v|_k^2$$

这里我们用了 2–3 节的等式(2–22), Parseval 恒等式(2–24), 以及不等式

$$\sum_{j=0}^{k}(1+|\xi|)^{2(k-h)}\tau^{2j}\leqslant C(1+[|\xi|^2+\tau^2]^{1/2})^{2k} \tag{8-71}$$

若 $v\in H^k(E^{n+1})$，则在 $S(E^{n+1})$ 中存在一个在 $H^k(E^{n+1})$ 中收敛到 v 的函数序列. 由 (8-70)，这个函数序列在 Ω 上的限制在 $H^{k,0}(\Omega)$ 中收敛. 因为这些限制都属于 $S(\Omega)$, 从而它们在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到 v，我们看到 v 在 Ω 上的限制属于 $H^{k,0}(\Omega)$，从而对于 v，(8-70) 成立. 这就完成了证明.

定理 8-22 若 $m>0$ 且 $\{v_j\}$ 是 $H^{m,0}(\Omega)$ 中的一个函数序列, 使得

$$|v_j|_{m,0}\leqslant C \tag{8-72}$$

则对于每个 $\varphi\in C_0^\infty(E^{n+1})$，对于每个 $k<m$，存在一个在 $H^{k,0}(\Omega)$ 中收敛的子序列 $\{\varphi v_j\}$. 特别是, $\{\varphi v_j\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛.

证明　设 L 是引理 8-20 中描述的映射, 则 (8-72) 蕴含着

$$|Lv_k|_m\leqslant C'$$

由定理 8-18, 存在 $\{v_k\}$ 的一个子序列 $\{g_i\}$, 使得 φLg_i 在 $H^k(E^{n+1})$ 中收敛. 由引理 8-21, φg_j (它们是 φLg_i 在 Ω 上的限制) 在 $H^{k,0}(\Omega)$ 中收敛. 这就完成了证明.

现在我们回到定义在 σ_R 上的函数空间 (见 8-4 节).

引理 8-23 $H_R\subset H^{m,0}(\Omega)$. (回忆 H_R 中的函数在 σ_R 之外等于零.)

证明　因为 $\mathscr{D}_R$ 在 H_R 中稠密并且范数是一样的，所以只要证明 $\mathscr{D}_R\subset H^{m,0}(\Omega)$ 就够了. 若 $v\in\mathscr{D}_R$，则 Lv 属于 $C^m(E^{n+1})$ (见引理 8-20 的证明) 并且当 $|x|>R$ 时等于零. 因此, 由引理 8-19, Lv 属于 $H^m(E^{n+1})$. 由此，Lv 在 Ω 上的限制 (也就是 v 本身) 属于 $H^{m,0}(\Omega)$ (引理 8-21).

现在我们可以给出

定理 8-5 的证明　显然, N'_R 是闭的. 因为, 若 $\{v_k\}$ 是 N'_R 中的一个函数序列，它在 H_R 中收敛到 v，则在 $L^2(\sigma_R)$ 中 $P'(x,t,D)v_k\to P'(x,t,D)v$. 因此, $v\in N'_R$. 这就证明了 N'_R 本身是一个 Hilbert 空间. 现在，假定 $\{v_k\}$ 是 N'_R 中满足 (8-72) 的一个函数序列. 设 ζ 是 C_0^∞ 中的一个函数, 它在 σ_R 上等于 1, 则 $\zeta v_k=v_k$. 因此，由定

理 8-22，存在一个在 $L^2(\sigma_R)$ 中收敛的 $\{v_k\}$ 的子序列 $\{g_j\}$．应用定理 8-8，我们得到

$$|g_j-g_k|_{m,0}\leqslant C\|g_j-g_k\|\to 0, \text{ 当 } j, k\to\infty \text{ 时}$$

因此 $\{g_j\}$ 同样在 H_R 中收敛．由定理 8-17，这就证明了 N'_R 是有限维的．

8-7 解决问题

在 8-4 节中我们证明了，对于充分小的 R，对于每个 $f\in L^2(\sigma_R)$，且使 $f\perp N'_R$，Dirichlet 问题(8-6)，(8-7)有一个弱解(推论 8-12)．在本节中我们将证明，只要 f 充分光滑，我们可以得到一个真解．为此我们要利用一个正则性定理，该定理可叙述为

定理 8-24 设 $P(x, t, D)$ 满足 8-1 节的假设．假定 $R_1\geqslant R>0$，$f\in C^\infty(\sigma_R)$，$u\in H_{R_1}$，并且

$$(P(x, t, D)u, P(x, t, D)v)=(f, v), \quad v\in\mathscr{D}_R \tag{8-73}$$

则对于某个 $R'>0$，在对一个零测集上的函数值进行修改以后，我们有 $u\in C^\infty(\bar{\sigma}_{R'})$．

定理 8-24 的证明并不是平凡的；证明将在 8-9 节中给出．现在我们用定理 8-24 来解方程(8-6)，(8-7)．定理 8-24 的一个直接推论是

推论 8-25 若 $u\in N'_R$，则对某个 $R'>0$，$u\in C^\infty(\bar{\sigma}_{R'})$．

另一个推论是

定理 8-26 若 $f\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$ 并且 $f\perp N'_R$，则对于某个 $R'>0$，问题(8-6)，(8-7)有一个解 $u\in C^\infty(\bar{\sigma}_{R'})$．

证明　设 M 是所有使得 $v\perp N'_R$ 的 $v\in H_R$ 构成的集合．容易验证 M 是 H_R 的一个闭子空间，因此 M 本身就是一个 Hilbert 空间．取 R 如此之小，使得(8-39)成立，并令

$$((u, v))=(P'(x, t, D)u, P'(x, t, D)v), \quad u, v\in H_R \tag{8-74}$$

从 (8-31) 和 (8-40) 可以看出 $((u, v))$ 具有 M 上的一个内积所具

有的一切性质，因而关于这个内积，M 是一个 Hilbert 空间．其次，考虑在 M 上的泛函

$$Fv=(v, f)$$

它显然是线性的．因为，由(8-39)，有

$$|(v, f)|\leqslant\|v\|\|f\|\leqslant\|f\|\|P'(x, t, D)v\|, \quad v\in M$$

所以它也是有界的．因此，由 Fréchet-Riesz 定理（1-5 节定理 1-5)，存在一个函数 $w\in M$，使得

$$Fv=((v, w)), \quad v\in M$$

因此 $$(P'(x, t, D)w, P'(x, t, D)v)=(f, v), \quad v\in M \tag{8-75}$$

我们断言(8-75)不仅对所有的 $v\in M$ 成立，而且对所有的 $v\in H_R$ 成立．因为，若 v 是 H_R 中的任一函数，我们有 $v=v_1+v_2$，其中 $v_1\in M$ 而 $v_2\in N'_R$(这里我们用了投影定理(1-5 节定理 1-3)和 N'_R 是有限维的这一事实（定理 8-5))．因为 $P'(x, t, D)v_2=0$ 并且 $(f, v_2)=0$，我们有

$$\begin{aligned}&(P'(x, t, D)w, P'(x, t, D)v)\\&\quad=(P'(x, t, D)w, P'(x, t, D)v_1)=(f, v_1)=(f, v)\end{aligned}$$

这就证明了对于所有的 $v\in H_R$，等式(8-75) 成立．现在我们注意到 $P'(x, t, D)$满足 8-1 节的所有的假设．所以，我们可以应用定理 8-24 来推出结论：对某个 $R'>0$，$w\in C^\infty(\bar{\sigma}_{R'})$．令 $u=P'(x,t, D)w$．于是，$u\in C^\infty(\bar{\sigma}_{R'})$，并且 u 是方程(8-6)，(8-7)的一个弱解．因此，由定理 8-1，u 是一个真解．这就完成了证明．

我们用下面的结果来结束本节．

推论 8-27 若 u 满足定理 8-24 的假设，则

$$D_t^k u(x, 0)=0, \quad |x|<R, \quad 0\leqslant k<r$$

证明 因为 $u\in H_{R_1}$，所以在 $\mathscr{D}_{R_1}$ 中存在一个函数序列 $\{u_k\}$，它在$H^{m,0}(\Omega)$ 中收敛到 u．特别是，在 $L^2(\Omega)$ 中 u_k 收敛到 u 而 $P(x,D)u_k$ 收敛到 $P(x, D)u$．因此，若 $v\in\mathscr{D}_R$，我们有

$$\begin{aligned}(u, P'(x, D)v)&=\lim(u_k, P'(x, D)v)\\&=\lim(P(x, D)u_k, v)\\&=(P(x, D)u, v)\end{aligned}$$

因此，u 是用 $P(x, D)u$ 代替 $f(x, t)$ 时，(8-6)，(8-7) 的一个弱解．因为对某个 $R'>0$，$u\in C^\infty(\bar{\sigma}_{R'})$，由 8-2 节的推理，立即推得 u 是一个真解．

8-8 半空间中的一些定理

在我们给出定理 8-24 的证明之前，我们先来收集一些将要用到的知识．

引理 8-28 设 k 是一个正整数，又假定 $v\in C^k(E^n)$ 使得对于 $|\mu|\leqslant k$，$D^\mu v\in L^2$，则 $v\in H^k$．

证明 设 $\psi(x)$ 是 C_0^∞ 中的一个函数，它使得

$$0\leqslant\psi(x)\leqslant 1,\ x\in E^n$$
$$\psi(x)=1,\ |x|<1$$

设 $\psi_R(x)=\psi(x/R)$ 而 $v_{R,\varepsilon}=\psi_R J_\varepsilon v$，则对于每个 R 和 ε 显然有 $v_{R,\varepsilon}\in S$．于是

$$\int|v_{R,\varepsilon}(x)-J_\varepsilon v(x)|^2dx$$
$$=\int(1-\psi_R)^2|J_\varepsilon v|^2dx\to 0,\ 当\ R\to\infty\ 时$$

因此，当 $R\to\infty$ 而 $\varepsilon\to 0$ 时，$v_{R,\varepsilon}\to v$．现在，若 $P(D)$ 是任一阶数 $\leqslant k$ 的偏微分算子，由 1-7 节等式 (1-102)，我们有

$$P(D)v_{R,\varepsilon}=\sum\frac{P^{(\mu)}(D)J_\varepsilon vD^\mu v_R}{\mu!}$$
$$=\sum\frac{(J_\varepsilon P^{(\mu)}(D)v)\psi_\mu(x/R)}{R^{|\mu|}\mu!}$$

其中 $\psi_\mu(x)=D^\mu\psi(x)$．因为 ψ_μ 是有界函数并且对于每个 μ，$P^{(\mu)}(D)v\in L^2$，所以存在一个不依赖于 R 和 ε 的常数，使得

$$\|P(D)v_{R,\varepsilon}\|\leqslant K$$

因为这对于任何阶数 $\leqslant k$ 的算子都是对的，所以存在一个不依赖于 R 和 ε 的常数 C，使得

$$|v_{R,\varepsilon}|_k\leqslant C$$

因为 $v_{R,\varepsilon}$ 属于 S，并且在 L^2 中收敛到 v，我们知道 $v\in H^k$　证毕．

引理 8-29 设 s, k 是使 $0<s<k$ 的整数. 假定 $v(x, t)$ 是一个定义在 E^{n+1} 上的函数, 使得对于 $1\leqslant j\leqslant n$ 有, $D_j v\in H^{s-1}(E^{n+1})\cap C^s(E^{n+1})$, 并且

$$|(v,\ D_t^k\varphi)|\leqslant K|\varphi|_{k-s},\ \varphi\in C_0^\infty(E^{n+1}) \tag{8-76}$$

则 $v\in H^s(E^{n+1})$.

证明 对于定义在 E^{n+1} 上的函数 $w(x, t)$, 令 $\widetilde{w}$ 表示关于所有 $n+1$ 个变量的 Fourier 变换. 由引理 8-28, 只要证明对于 $|\mu|+j\leqslant s$ 有 $D_x^\mu D_t^j v\in L^2$ 就行了. 由 6-8 节的引理 6-28 知道, 这等价于证明: 对于这样的 μ 和 j 有 $\xi^\mu\tau^j\widetilde{v}\in L^2$. 根据假设, 若 $j<s$, 这是对的. 因此, 只要证明 $\tau^s\widetilde{v}\in L^2$ 就行了.

令 $\eta=(\xi, \tau)$. 由(8-76), 线性泛函 $(D_t^k\varphi,\ v)$ 在 H^{k-s} 上是有界的. 因此, 由 Fréchet-Riesz 表示定理(1-5 节定理 1-5), 存在一个 $w\in H^{k-s}$, 使得

$$(v,\ D_t^k\varphi)=\int(1+|\eta|)^{2k-2s}\widetilde{w}\bar{\widetilde{\varphi}}d\eta$$

因为 C_0^∞ 在 L^2 中是稠密的, 这就给出

$$\tau^k\widetilde{v}=(1+|\eta|)^{2k-2s}\widetilde{w} \tag{8-77}$$

但是

$$|\tau|^s|\widetilde{v}|=\frac{|\tau|^{s+2k}|\widetilde{v}|}{|\tau|^{2k}+|\xi|^{2k}+1}+\frac{|\tau|^s(|\xi|^{2k}+1)|\widetilde{v}|}{|\tau|^{2k}+|\xi|^{2k}+1}$$

因此, 由等式(8-77)

$$\begin{aligned}|\tau|^s|\widetilde{v}|&=\frac{|\tau|^{s+k}(1+|\eta|)^{2k-2s}|\widetilde{w}|}{|\tau|^{2k}+|\xi|^{2k}+1}+\frac{|\tau|^s(|\xi|^{2k}+1)|\widetilde{v}|}{|\tau|^{2k}+|\xi|^{2k}+1}\\&\leqslant\frac{(1+|\eta|)^{2k}}{|\tau|^{2k}+|\xi|^{2k}+1}(1+|\eta|)^{k-s}|\widetilde{w}|\\&\quad+\text{const}(|\xi|\,|\tau|^{s-1}+|\xi|^s+1)|\widetilde{v}|\end{aligned} \tag{8-78}$$

最后的不等式是从下面的事实得到的:

1. $|\xi|\,|\tau|^{2k+s-1}+|\xi|^{2k+1}|\tau|^{s-1}+|\tau|^{2k}+1$
$$\leqslant(|\xi|\,|\tau|^{s-1}+|\xi|^s+1)(|\tau|^{2k}+|\xi|^{2k}+1)$$
2. $|\tau|^s\leqslant\text{const}(|\tau|^{2k}+1)$
3. 函数 $\alpha^{2k-1}+\alpha^{-1}$ 在 $(0,\ \infty)$ 上有一个正的最小值, 因为在这个区

间上它是正的，而且当 $\alpha\to 0$ 和 $\alpha\to\infty$ 时趋于 ∞.

4. 因此

$$|\tau|^s|\xi|^{2k}\leqslant \text{const}(|\xi||\tau|^{2k+s-1}+|\xi|^{2k+1}|\tau|^{s-1}) \tag{8-79}$$

这可以从 3 得到，如果我们取 $\alpha=|\tau|/|\xi|$ 的话.

我们现在注意到，根据假定，(8-78) 右端所有的项都属于 L^2. 因为

$$(1+|\eta|)^s\leqslant \text{const}(|\tau|^s+|\xi|^s+1) \tag{8-80}$$

我们知道 $v\in H^s$. 证毕.

对于任何实数 $h\neq 0$，令

$$x_i^h=(x_1,\ \cdots,\ x_i+h,\ \cdots,\ x_n) \tag{8-81}$$

以及

$$\delta_i^h u(x,\ t)=\frac{[u(x_i^h,\ t)-u(x,\ t)]}{h\sqrt{-1}} \tag{8-82}$$

引理 8-30 对于 $u\in H^{0,1}(\Omega)$，有

$$\|\delta_i^h u\|^\Omega\leqslant\|D_i u\|^\Omega \tag{8-83}$$

和

$$\|\delta_i^h u-D_i u\|^\Omega\to 0,\ \text{当}\ h\to 0\ \text{时} \tag{8-84}$$

证明 若 $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$ 在一个有界集外等于零，显然 (8-84) 是成立的(因为这时差商一致收敛到导数). 而且，对于这样一些函数

$$\delta_i^h u(x,\ t)=\int_0^1 D_i u(x_i^{\lambda h},\ t)d\lambda \tag{8-85}$$

Schwarz 不等式(1-62)给出

$$|\delta_i^h u(x,\ t)|^2\leqslant\int_0^1|D_i u(x_i^{\lambda h},\ t)|^2 d\lambda$$

若现在我们在 Ω 上积分，我们就得到(8-83).

现在，假定 $u\in H^{0,1}(\Omega)$. 于是存在一个上面提到过的那种类型的函数序列 $\{u_k\}$，它在 $H^{0,1}(\Omega)$ 中收敛到 u. 因此

$$\|\delta_i^h u\|^\Omega=\lim\|\delta_i^h u_k\|^\Omega\leqslant\lim\|D_i u_k\|^\Omega=\|D_i u\|^\Omega$$

以及

$$\|\delta_i^h u-D_i u\|^\Omega\leqslant\|\delta_i^h(u-u_k)\|^\Omega+\|\delta_i^h u_k-D_i u_k\|^\Omega$$
$$+\|D_i(u_k-u)\|^\Omega=A+B+C$$

因为已知(8-83)对于 u 是成立的，对于任何 $\varepsilon>0$，我们可以取 k

如此之大使得 A 和 C 都小于 $\varepsilon/3$. 一旦 k 固定后, 我们取 h 如此之小, 使得 B 小于 $\varepsilon/3$. 这就完成了证明.

其次, 我们用 $H_0^{k,s}(\Omega)$ 来表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 关于 $H^{k,s}(\Omega)$ 中的范数的完备化(即, $H_0^{k,s}(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^{k,s}(\Omega)$ 中的闭包). 我们有

引理 8-31 若 $v\in C_0^\infty(E^{n+1})$, 并且

$$D_t^j v(x,\ 0)=0,\ 0\leqslant j<k \tag{8-86}$$

则对于任何 s, $v\in H_0^{k,s}(\Omega)$.

证明 令

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x,\ t)&=v(x,\ t-3\varepsilon),\ t>3\varepsilon \\ &=0, \qquad\qquad t<3\varepsilon \end{aligned}$$

那么由等式(8-86), 有 $v_\varepsilon\in C^{k-1}(\Omega)$, 并且容易验证

$$\|v_\varepsilon-v\|^\Omega\to 0,\ 当\ \varepsilon\to 0\ 时$$

而且, 对于每个 $\varepsilon>0$, $J_\varepsilon v_\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega)$, 并且

$$\begin{aligned} \|J_\varepsilon v_\varepsilon-v\|^\Omega &\leqslant \|J_\varepsilon(v_\varepsilon-v)\|^\Omega+\|J_\varepsilon v-v\|^\Omega \\ &\leqslant \|v_\varepsilon-v\|^\Omega+\|J_\varepsilon v-v\|^\Omega\to 0,\ 当\ k\to\infty\ 时 \end{aligned}$$

根据 Banach-Saks 定理(1-5 节定理1-9), 只要证明对任何 s, 有

$$|J_\varepsilon v_\varepsilon|_{k,s}\leqslant M_s$$

就行了. 由 2-2 节的等式(2-19), 有

$$\begin{aligned} \iint_\Omega |D^\mu J_\varepsilon v_\varepsilon|^2 dx\,dt &= \iint_{t>2\varepsilon} |J_\varepsilon D^\mu v_\varepsilon|^2 dx\,dt \\ &\leqslant \iint_{t>2\varepsilon} |D^\mu v_\varepsilon|^2 dx\,dt=\iint_\Omega |D^\mu v|^2 dx\,dt \end{aligned}$$

因此

$$|J_\varepsilon v_\varepsilon|_{k,s}\leqslant |v|_{k,s}$$

证毕.

引理 8-32 设 s 是一整数, 又设 k 是一个大于 s 的正整数. 若 $v\in H^{s-1,1}(\Omega)$, 并且

$$|(v,\ D_t^k\varphi)|\leqslant K|\varphi|_{k-s,0},\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{8-87}$$

则 $v\in H^{s,0}(\Omega)$.

证明 由完备化知道, (8-87) 对 $\varphi\in H_0^k(\Omega)$ 成立. 设 ψ 是 $C_0^\infty(E^{n+1})$ 中的任一函数. 若 L 是由 $m=k$ 时的(8-65)式给出, 我们有

$$(Lv,\ D_t^k\psi)=\iint\limits_{\Omega} v(x,\ t)\overline{D_t^k\psi(x,\ t)}\,dx\,dt$$

$$+\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_j\iint\limits_{t<0} v(x,\ -jt)D_t^k\psi(x,\ t)\,dx\,dt$$

$$=\iint\limits_{\Omega} v(x,\ t)D_t^k\varphi(x,\ t)\,dx\,dt$$

其中

$$\varphi(x,\ t)=\psi(x,\ t)-\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_j(-j)^{k-1}\psi\left(x,\ -\frac{t}{j}\right)$$

由(8-66),我们知道 φ 满足引理 8-31 的假设．因此 $\varphi\in H_0^{k,0}(\Omega)$．由(8-87),我们有

$$|(Lv,\ D_t^k\psi)|=|(v,\ D_t^k\varphi)|\leqslant K|\varphi|_{k-s,0}$$
$$\leqslant \mathrm{const}|\psi|_{k-s}$$

把引理 8-29 用到 Lv 上去，我们知道 $Lv\in H^s(E^{n+1})$．因为在 Ω 上 $Lv=v$,这就给出了 $v\in H^s(\Omega)$．　　证毕．

引理 8-33　对于每个 $k\geqslant 0$ 和 $\varepsilon>0$, 存在一个常数 K, 使得对于任何的 s 和 $v\in H^{k+1,s}(\Omega)$

$$|v|_{k,s}\leqslant\varepsilon\sum_{|\mu|=k+1}|D^\mu v|_{0,s}+K|v|_{0,s}$$

成立．

证明　重复应用 6-7 节的定理 6-25 就得到引理．

8-9　在边界上的正则性

现在我们来给出定理 8-24 的证明．首先,我们注意到对于所有的 $v\in C_0^\infty(\sigma_R)$,等式(8-73)成立．因此

$$(u,\ P'(x,\ t,\ D)P(x,\ t,\ D)v)=(f,\ v),\ v\in C_0^\infty(\sigma_R)$$

容易验证算子 $P'(x,t,D)P(x,t,D)$ 是椭圆算子．因此，由 3-1 节的定理 3-1,在一个零测度集上修改了函数 u 的值后,$u\in C^\infty(\sigma_R)$．因此,我们必须证明的全部事情就是：直到边界 $t=0$, u 都是无穷次可微的．

为此,设 ζ 是 $C^\infty(\bar{\sigma}_R)$ 中的一个实值函数,它在 $\partial_1\sigma_R$ 附近等于零,而对于某个正的 ε,在 $\sigma_{R-\varepsilon}$ 中等于1. 我们令

$$[u,\ v]=(P(x,\ t,\ D)u,\ P(x,\ t,\ D)v) \tag{8-88}$$

引理 8-34 存在常数 K,使得对于充分小的 h,

$$\begin{aligned}&|[\delta_i^h(D_x^\mu\zeta u),\ v]-[u,\ D_x^\mu\zeta\delta_i^{-h}v]|\\&\qquad\leqslant K|v|_{m,0}\sum_{|\nu|\leqslant|\mu|}|D_x^\nu u|_{m,0}\end{aligned} \tag{8-89}$$

成立.

证明 本引理的证明是初等的,但有点冗长乏味. 证明是以如下的简单事实为基础的:

1. 若 w 在 $\partial_1\sigma_R$ 的附近等于零并且 h 充分小,则

$$\iint\limits_{\sigma_R}\delta_i^h w(x,\ t)\,dxdt=0 \tag{8-90}$$

2. $\delta_i^h D^\mu=D^\mu\delta_i^h$

3. $\delta_i^h[w(x)v(x)]=w(x)\delta_i^h v(x)+v(x_i^h)\delta_i^h w(x)$

4. 若 wv 在 $\partial_1\sigma_R$ 附近等于零并且 h 充分小,则

$$(\delta_i^h w,\ v)=(w,\ \delta_i^{-h}v) \tag{8-91}$$

若 $|A-B|$ 为(8-89)的右端所界住, 我们将记为 $A\sim B$. 为证明本引理, 我们必须证明, 每当 $a(x,\ t)\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$ 而 $|\rho|$, $|\sigma|<m$ 时,对于小的 h,有

$$(aD^\rho\delta_i^h D_x^\mu\zeta u,\ D^\sigma v)\sim(aD^\rho u,\ D^\sigma D_x^\mu\zeta\delta_i^{-h}v)$$

由1到4,我们有

$$\begin{aligned}(aD^\rho\delta_i^h D_x^\mu\zeta u,\ D^\sigma v)&=(D^\rho D_x^\mu\zeta u,\ \delta_i^{-h}\bar{a}D^\sigma v)\\&=(D_x^\mu D^\rho\zeta u,\ \bar{a}\delta_i^{-h}D^\sigma v+D^\sigma v(x_i^{-h})\delta_i^{-h}\bar{a})\\&\sim(\delta_i^h aD_x^\mu D^\rho\zeta u,\ D^\sigma v)\\&\sim(\delta_i^h\zeta aD_x^\mu D^\rho u,\ D^\sigma v)\\&\sim(\delta_i^h\zeta D_x^\mu aD^\rho u,\ D^\sigma v)\\&=(D_x^\mu aD^\rho u,\ \zeta\delta_i^{-h}D^\sigma v)\\&\sim(D_x^\mu aD^\rho u,\ D^\sigma\zeta\delta_i^{-h}v)\\&=(aD^\rho u,\ D^\sigma D_x^\mu\zeta\delta_i^{-h}v)\end{aligned}$$

这里我们还用到了引理 8-30. 这就完成了证明.

现在我们准备来证明定理 8-24. 通过完备化知道, 对于所有的 $v\in H_R$, 等式(8-73)成立(见 8-4 节开始的一段). 设 ζ 是本节(8-9 节)开始定义的函数. 于是, 由引理 8-34, 我们有

$$|[\delta_i^h(\zeta u),\ v]|\leqslant|(f,\ \zeta\delta_i^{-h}v)|+K|u|_{m,0}|v|_{m,0}\qquad(8\text{-}92)$$

(我们取 $\mu=0$). 现在, 容易证明, 对于充分小的 h, $\delta_i^h(\zeta u)$ 属于 H_R. 事实上, 若 $\{u_k\}$ 是 $C^\infty(\bar{\sigma}_R)$ 中满足等式(8-12)的一个函数序列, 并且 $|u_k-u|_{m,0}\to 0$, 则 $\delta_i^h(\zeta u_k)$ 属于 $\mathscr{D}_R$, 并且

$$|\delta_i^h(\zeta u_k)-\delta_i^h(\zeta u)|_{m,0}\to 0$$

因此, 在(8-92)中我们可以取 $v=\delta_i^h(\zeta u)$. 这就给出

$$\|P(x,\ t,\ D)\delta_i^h(\zeta u)\|^2<\text{const}|\delta_i^h(\zeta u)|_{m,0}$$

我们可以假定 R 如此之小, 使得定理 8-8 成立. 因此

$$|\delta_i^h(\zeta u)|_{m,0}^2\leqslant\text{const}(|\delta_i^h(\zeta u)|_{m,0}+\|\delta_i^h(\zeta u)\|^2)$$

其中常数不依赖于 h. 因为 $\|\delta_i^h(\zeta u)\|\leqslant\|D_i(\zeta u)\|$(引理 8-30), 我们有

$$|\delta_i^h(\zeta u)|_{m,0}\leqslant\text{常数}$$

常数不依赖于 h. 因为 $\delta_i^h(\zeta u)$ 在 L^2 中收敛到 $D_i(\zeta)$(再次由引理 8-30 推得), 从 Banach-Saks 定理(1-5 节定理 5-9)得到 $D_i(\zeta u)$ 属于 $H^m(\Omega)$. 对于任何 $i\leqslant n$, 这都是对的.

其次, 我们应用 $|\mu|=1$ 时的引理 8-34. 设 $\varepsilon>0$ 给定, 又设 R_1 满足 $R-\varepsilon<R_1<R$. 设 $\zeta\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$ 使得 ζ 在 σ_{R_1} 外等于零, 而在 $\sigma_{R-\varepsilon}$ 中等于 1. 于是, 对于 $i,\ j\leqslant n$, 我们有

$$|[\delta_i^hD_j(\zeta u)v]|\leqslant|(\delta_i^h\zeta D_jf,\ v)|+K\,|v|_{m,0}\sum_{j=1}^n|D_ju|_{m,0}$$

因为对于每个 $j\leqslant n$, D_ju 属于 $H^m(\Omega)$, 上式右端是有限的. 和以前一样, 我们注意到对于充分小的 h, $\delta_i^hD_j(\zeta u)$ 属于 H. 因此, 我们可以取 $v=\delta_i^hD_j(\zeta u)$. 这就给出了

$$\|P(x,\ t,\ D)\delta_i^hD_j(\zeta u)\|^2\leqslant C|\delta_i^hD_j(\zeta u)|_{m,0}$$

由此, 经由 6-7 节的定理 6-26, 我们得到

$$|\delta_i^hD_j(\zeta u)|_{m,0}\leqslant\text{常数}$$

其中常数不依赖于 h. 因为 $\delta_i^h D_j(\zeta u)$ 在 L^2 中收敛到 $D_iD_j(\zeta u)$, 所以我们证明了, 对于任何 i, $j\leqslant n$ 和前述的任何 ζ 而言, 函数 $D_iD_j(\zeta u)$ 属于 $H^m(\Omega)$. 继续这样做, 我们就证明了对于任何的 μ 和任何的 ζ, $D_x^\mu(\zeta u)$ 属于 $H^m(\Omega)$.

现在证明几乎就完成了. 我们知道 $u\in C^\infty(\sigma_R)$ 并且满足一个 $2m$ 阶椭圆型方程

$$P'(x, t, D)P(x, t, D)u=f$$

若 $a(x,t)$ 是这个方程中 D_t^{2m} 的系数, 我们知道在 $\bar{\sigma}_R$ 上 $a(x,t)\neq 0$. 设 $\varepsilon>0$ 给定, 又设 $\zeta\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$ 在 $\partial_1\sigma_R$ 附近等于零, 而在 $\sigma_{R-\varepsilon}$ 上等于 1. 令 $w=a\zeta u$, 我们有

$$D_t^{2m}w=\zeta f+\sum_{k=0}^{2m-1}D_t^kB_ku \tag{8-93}$$

其中 B_k 是只包含关于 x_k 的导数的偏微分算子, 并在 $\bar{\sigma}_R$ 上有无穷可微的系数, 它们在 $\partial_1\sigma_R$ 附近等于零. 因此, 对于任何的 μ,

$$D_t^{2m}D_x^\mu w=D_x^\mu\zeta f+\sum_{k=0}^{2m-1}D_t^kD_x^\mu B_ku \tag{8-94}$$

现在, 我们知道对所有的 μ, $D_x^\mu w\in H^m(\Omega)$. 而且, 由等式(8-94),

$$|(D_x^\mu w,\ D_t^{2m}\varphi)|\leqslant\text{const}|\varphi|_{m-1,0},\ \varphi\in C_0^\infty(\sigma_R) \tag{8-95}$$

(8-95) 从对于每个 k 和 μ 成立的 $D_x^\mu B_ku\in H^m(\Omega)$ 这个事实推得. 因此, 对于 $j\leqslant m$, $D_t^jD_x^\mu B_ku$ 属于 $L^2(\sigma_R)$. 而且对于 $k>m$, 我们有

$$\begin{aligned}|(D_t^kD_x^\mu B_ku,\ \varphi)|&=|(D_t^mD_xB_ku,\ D_t^{k-m}\varphi)|\\&\leqslant\|D_t^mD_xB_ku\|\,\|D_t^{k-m}\varphi\|\leqslant\text{const}|\varphi|_{m-1,0}\end{aligned}$$

因为对任何 μ, $D_x^\mu w\in H^m(\Omega)$, 这就意味着对任何 S, $D_x^\mu w\in H^{m,s}(\Omega)$. 这个事实以及(8-95)允许我们应用引理 8-32 去得出 $D_x^\mu w\in H^{m+1}(\Omega)$. 这样, 对于任何 μ 和 ζ, $D_x^\mu(\zeta u)$ 属于 $H^{m+1}(\Omega)$. 于是, 等式(8-94)允许我们得出

$$|(D_x^\mu w,\ D_t^{2m}\varphi)|\leqslant\text{const}|\varphi|_{m-2,0},\ \varphi\in C_0^\infty(\sigma_R)$$

再用一次引理 8-32 表明 $D_x^\mu w\in H^{m+2}(\Omega)$. 因此, 对每个 μ, $D_x^\mu(\zeta u)\in H^{m+2}(\Omega)$. 继续这样做, 最终我们得到, 对于每个 μ 和 ζ, $D_x^\mu(\zeta u)\in H^{2m}(\Omega)$. 继续往下证时, 我们不再需要引理 8-32 了,

我们只要把等式(8-94)对 t 求微商．因此

$$D_t^{2m+1}D_x^{\mu}w=D_tD_x^{\mu}\zeta f+\sum_{k=0}^{2m-1}D_t^{k+1}D_x^{\mu}B_ku$$

右端的每一项都属于 $L^2(\sigma_R)$．因此，对于任何 μ 和 ζ, $D_x^{\mu}(\zeta u)$ 属于 $H^{2m+1}(\Omega)$．继续这样的过程，对于每个 k, s 和 ζ, 我们有 $|\zeta u|_{k,s}<\infty$．在 6-8 节中已经证明过，这就蕴含着 $\zeta u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$．因为对于任何 $\varepsilon>0$, 我们可以找到一个所要求类型的 ζ, 它在 $\sigma_{R-\varepsilon}$ 上等于 1, 所以我们有 $u\in C^{\infty}(\overline{\sigma}_{R-\varepsilon})$．　　证毕.

习　　题

8-1　证明由等式(8-11)给出的算子集合是一个 Dirichlet 组.

8-2　证明由等式(8-30)定义的函数满足方程(8-28).

8-3　证明由等式(8-44)给出的 $P_1(D)$ 是纯椭圆算子.

8-4　证明：当 T_1 和 T_2 都是紧算子时, $\alpha_1T_1+\alpha_2T_2$ 也是紧算子.

8-5　证明：T 是紧算子而 B 是有界算子蕴含着 BT 和 TB 都是紧算子.

8-6　试证明：对于每个 $\delta>0$ 和 $R>0$, E^n 中的集合 $|\xi|\leqslant R$ 可以用有限个半径为 δ 的球覆盖住.

8-7　试证明(8-63).

8-8　证明：总存在常数 λ_k, 使得等式(8-66)成立.

8-9　证明：当等式(8-66)成立时, $Lu\in C^n(E^{n+1})$.

8-10　证明不等式(8-67)和(8-71).

8-11　在定理 8-26 的证明中，证明：关于 $H^{m,0}(\Omega)$ 中的内积，或由等式(8-74)给出的内积, M 是一个 Hilbert 空间.

8-12　试证明引理 8-29 证明中的结论 3.

8-13　证明不等式(8-80).

8-14　若 $\varphi\in C_0^{\infty}$, 试证明一致地有 $\delta_i^h\varphi\to D_i\varphi$.

8-15　试证明 8-9 节中的结论 1-4.

8-16　证明等式(8-93).

8-17　证明等式(8-85).

第九章　一 般 区 域

9-1　基 本 定 理

在第四至八章中我们已经会解带状区域、半空间或者半球中的各种边值问题. 特别是，只要 R 充分小，并且在边界的"弯曲"部分 $\partial_1\sigma_R$ 上不规定边界条件的话，我们已经会解区域 σ_R 中一个变系数椭圆方程的 Dirichlet 问题.

在本章中，我们要证明：只要边界充分光滑，在一个任意有界区域中，对于一个变系数椭圆算子来说，Dirichlet 问题是可解的. 我们不去详细说明边界要多光滑. 事实上，我们将总假定它是处处无穷可微的. 但是很清楚，如果有谁愿意去做麻烦的验算工作的话，那么假定少得多的光滑性，也将能得到同样的结果.

首先，我们必须定义我们的术语. 设 G 是 E^n 中一个有界区域. 如果对于每个 $x\in\partial G$，存在 x 的一个邻域 $\mathscr{N}_x$，以及从 $\mathscr{N}_x$ 到集合 $|x|\leqslant 1$ 上的一个映射 Φ_x，使得

(a) Φ_x 是一对一的.

(b) $\Phi_x(x)=0$.

(c) Φ_x 和 Φ_x^{-1} 都是无穷次可微的.

(d) $\Phi_x(\mathscr{N}_x\cap\partial G)$ 是那些适合 $|x|<1$ 的 $x\in E^{n-1}$ 所构成的集合.

我们就把 G 的边界 ∂G 称为是**光滑的**. 和往常一样，这里 E^{n-1} 表示 E^n 中的超平面 $x_n=0$.

其次，我们考虑定义在 G 上的函数. 我们把集合 $C^\infty(\overline{G})$ 定义为 G 中无穷次可微并且其各阶导数都连续到边界 ∂G 的函数集合. 容易证明，当 ∂G 是光滑的时候，$C^\infty(\overline{G})$ 中的每个函数是 C_0^∞ 中的函数在 $\overline{G}$ 上的限制，但是，我们并不需要这个事实.

对于一个偏微分算子 $P(x, D)$，我们早已定义在一点以及在

一个区域中的椭圆性(见 3–1 节). 类似地, 如果 $P(x, D)$ 在 $\overline{G}$ 的每一点上都是椭圆的, 我们就说 $P(x, D)$ 在 $\overline{G}$ 上是椭圆的. 对于一个齐次常系数算子, 在 6–9 节中我们定义了纯椭圆性. 我们把这个定义推广到变系数算子和一般区域上去. 我们将把 m 阶算子 $P(x, D)$ 称为在 $\overline{G}$ 上是**纯椭圆的**, 如果

(i) m 是偶数.

(ii) $P(x, D)$ 在 $\overline{G}$ 上是椭圆的.

(iii) 对于每个 $x\in\overline{G}$ 和每对线性无关的向量 $\xi, \eta\in E^n$, 多项式

$$p(z)=p(x, \xi+z\eta) \tag{9-1}$$

恰好有 $m/2$ 个带有正虚部的根(回忆由 3–1 节等式(3–5) 给出的 $p(x, \xi)$ 的定义).

由 6–9 节的定理 6–31, 我们有

引理 9–1 若 $n>2$, 则每个 $\overline{G}$ 上的椭圆算子 $P(x, D)$ 也是纯椭圆的.

我们还有

引理 9–2 若 $P(x, D)$ 在 $\overline{G}$ 上是椭圆的, 并且存在一个 $x\in G$ 和向量 $\xi, \eta\in E^n$, 使得由(9–1)式给出的 $p(z)$ 恰好有 $m/2$ 个带有正虚部的根, 则 $P(x, D)$ 在 $\overline{G}$ 上是纯椭圆的.

我们把这个引理的证明留作习题. 本章的主要结果将是

定理 9–3 设 G 是一个光滑、有界区域, 又设 $P(x, D)$ 是一阶数 $m=2r$ 的算子, 它在 $\overline{G}$ 上是纯椭圆的, 并具有属于 $C^\infty(\overline{G})$ 的系数. 设 N 是由满足 $P(x, D)v=0$ 和

$$D^\mu v=0, \text{ 在 } \partial G \text{ 上}, |\mu|<r \tag{9-2}$$

的那些 $v\in C^\infty(\overline{G})$ 构成的集合, 又设 N' 是由满足 (9–2) 和 $P'(x, D)v=0$ 的那些 $v\in C^\infty(\overline{G})$ 构成的集合(同往常一样, $P'(x, D)$ 表示 $P(x, D)$ 的形式共轭, 见 1–3 节). 那么, 我们有

1. N 和 N' 都是 $L^2(G)$ 的有限维子空间.

2. 对于 $f\in C^\infty(\overline{G})$, 当且仅当 $f\perp N'$ 时,

$$P(x, D)u=f, \text{ 在 } G \text{ 中} \tag{9-3}$$

和

$$D^\mu u=0, \text{ 在 } \partial G \text{ 上}, |\mu|<r \tag{9-4}$$

有一个解 $u\in C^{\infty}(\overline{G})$.

3．若 $u\in L^2(G)$, $f\in C^{\infty}(\overline{G})$，并且对所有满足(9–2)的 $v\in C^{\infty}(\overline{G})$，有

$$(u,\ P'(x,\ D)v)=(f,\ v) \tag{9-5}$$

则在一个零测度集上修改了函数值后，$u\in C^{\infty}(\overline{G})$．而且，$u$ 满足方程(9–3)，(9–4)．

4．若 $v\in L^2(G)$，$g\in C^{\infty}(\overline{G})$，并且对所有满足方程(9–4)的 $u\in C^{\infty}(\overline{G})$，

$$(v,\ P(x,\ D)u)=(g,\ u) \tag{9-6}$$

成立，则在修改了一个零测集上的函数值后，$v\in C^{\infty}(\overline{G})$。而且 v 满足(9–2)和 $P'(x,\ D)v=g$.

本章的其余部分用来证明本定理．在9–2节中我们说明可以用一个不等式和一个正则性定理来证明定理9–3．当然，后面我们必须证明这个不等式和这个正则性定理．

9–2 一个不等式和一个正则性定理

在本节中，我们将说明怎样把定理9–3的证明化为一个不等式和一个类似于8–7节的定理8–24的正则性定理．在陈述这个不等式时，我们将利用一组范数，它们类似于我们一直在用的那些范数．对于一个非负整数 k 和一个有界区域 G，令

$$\|u\|_k^G=\left(\int_G\sum_{|\mu|\leqslant k}|D^{\mu}u(x)|^2dx\right)^{1/2} \tag{9-7}$$

又设 $H^k(G)$ 表示 $C^{\infty}(\overline{G})$ 关于这个范数的完备化．当不会产生混淆时，我们将扔掉上标 G.

我们还将对8–4节中的记号稍作修改．我们将用 $\mathscr{D}$ 来表示满足等式(9–4)的那些函数 $u\in C^{\infty}(\overline{G})$ 的集合，并用 H 来表示 $\mathscr{D}$ 在 $H^m(G)$ 中的闭包．若 $P(x,\ D)$ 是一个系数有界、阶数 $\leqslant m$ 的偏微分算子，则

$$\|P(x,\ D)u\|\leqslant\text{const}\|u\|_m,\ u\in C^m(\overline{G}) \tag{9-8}$$

利用这个不等式，对于 $u\in H^m(G)$ 我们可以定义 $P(x, D)u$.

我们的不等式由下面的定理给出.

定理 9-4 在定理 9-3 的假设下，存在一个常数 C，使得

$$\|u\|_m\leqslant C(\|P(x, D)u\|+\|u\|),\ u\in H \tag{9-9}$$

注意这个不等式和 2-4 节的不等式(2-44)，6-7 节的(6-131)以及 8-4 节的(8-48)这些不等式之间的相似之处.

我们的正则性定理由下面的定理给出.

定理 9-5 在同样的假设下，若 $f\in C^\infty(\overline{G})$，$u\in H$，并且

$$(P(x, D)u,\ P(x, D)v)=(f,\ v),\ v\in\mathscr{D} \tag{9-10}$$

则 $u\in\mathscr{D}$ 并且 $P(x, D)u\in\mathscr{D}$. 当 $P(x, D)$ 代之以 $P'(x, D)$ 时，同样的结论成立.

定理 9-4 将在 9-5 节中证明，定理 9-5 将在 9-3 节中证明. 现时，我们将说明怎么从定理 9-4 和定理 9-5 推出定理 9-3. 首先，我们有

推论 9-6 在同样的假定下，存在一个常数 C，使得

$$\|u\|_m\leqslant C(\|P'(x, D)u\|+\|u\|),\ u\in H \tag{9-11}$$

这可以从定理 9-4 以及 $P(x, D)$ 在 $\overline{G}$ 上是纯椭圆算子当且仅当 $P'(x, D)$ 是纯椭圆算子这一结果推出. 因此，如果 $P(x, D)$ 满足定理 9-3 的全部假设，则 $P'(x, D)$ 同样满足这些假设.

推论 9-7 在同样的假设下，若 $u\in H$，并且 $P(x, D)u=0$，则 $u\in N$. 类似地，若 $v\in H$，并且 $P'(x, D)v=0$，则 $v\in N'$.

证明 若 $u\in H$，并且 $P(x, D)u=0$，则对所有的 $v\in\mathscr{D}$ 有 $(P(x,D)u,\ P(x, D)v)=(0,\ v)$. 因此，由定理 9-5，$u\in\mathscr{D}$. 因此，$u\in N$. 另一个结论可由类似的推理给出.

在从定理 9-4 和定理 9-5 推出进一步的结论时，我们将利用

引理 9-8 对于在 G 上定义的任一函数 v，令

$$\hat{v}=v,\ 在\ G\ 中$$
$$=0,\ 在\ G\ 外$$

若 $v\in\mathscr{D}$，则 $\hat{v}\in H^r$，并且

$$|\hat{v}|_r=\text{const}\|v\|_r^G \tag{9-12}$$

证明　令 $v_\varepsilon = J_\varepsilon \hat{v}$, 则 $v_\varepsilon \in S$, 并且当 $\varepsilon \to 0$ 时，在 L^2 中 $v_\varepsilon \to \hat{v}$(2-2 节的定理 2-3)．而且,对于 $|\mu| \leqslant r$, 由分部积分,我们有

$$D^\mu v_\varepsilon(x) = \int D^\mu j_\varepsilon(x-y)\hat{v}(y)dy = \int j_\varepsilon(x-y)D^\mu \hat{v}(y)dy$$

分部积分时应该出现的边界积分，由于加在 v 上的边界条件而等于零(见 1-3 节等式 (1-27))．因此，在 L^2 中 $D^\mu v_\varepsilon \to D^\mu \hat{v}$. 这就证明了 $\hat{v} \in H^r$, 并且等式(9-12)成立(8-8 节引理 8-28).

现在我们可以证明定理 9-3 的结论 1, 把 N 看作是 $L^2(G)$的一个子空间,并假定 $\{u_k\}$ 是 N 中的一个函数序列,使得

$$\|u_k\| \leqslant M$$

由定理 9-4

$$\|u_k\|_m \leqslant CM$$

从而,由引理 9-8,

$$|\hat{u}_k|_r \leqslant C'$$

设 ζ 是 C_0^∞ 中的一个函数，它在 G 中等于 1．由 8-6 节的定理 8-18, $\{\zeta \hat{u}_k\} = \{\hat{u}_k\}$ 有一个在 L^2 中的收敛子序列．因此，$\{u_k\}$ 有一个在 $L^2(G)$ 中收敛的子序列．于是从 8-5 节的定理 8-17 就推出 N 是有限维的．对 N' 可进行类似的推理.

其次，设 M 是所有使 $u \perp N$ 的 $u \in H$ 的集合，又设 M' 是所有使 $v \perp N'$ 的 $v \in H$ 的集合 (在两种情形中正交性都是由 $L^2(G)$ 中的内积来表示的)．我们有

推论 9-9　存在常数 C, 使得

$$\|u\|_m \leqslant C\|P(x, D)u\|, \quad u \in M \tag{9-13}$$

$$\|v\|_m \leqslant C\|P'(x, D)v\|, \quad v \in M' \tag{9-14}$$

证明　假定(9-13)不对．那么应该存在一个 M 中的函数序列 $\{u_k\}$, 使得

$$\|u_k\|_m = 1, \quad \|P(x, D)u_k\| \to 0, \quad k \to \infty \tag{9-15}$$

根据前面的推理,存在一个在 $L^2(G)$ 中收敛的子序列(也用 $\{u_k\}$ 来记)．由不等式(9-9),

$$\|u_j - u_k\|_m \leqslant C(\|P(x, D)(u_j - u_k)\| + \|u_j - u_k\|) \to 0, \quad \text{当 } j, k \to 0 \text{ 时}$$

因此，存在一个 $u\in H$，使得在 H 中，$u_k\to u$. 显然，$u\in M$. 因为 $P(x, D)u_k\to P(x, D)u$，我们有 $P(x, D)u=0$. 因此 $u\in N$(推论 9-7). 这只可能在 $u=0$ 时才会发生. 但由(9-15)，$\|u\|_m=\lim\|u_k\|_m=1$. 这个矛盾就给出了(9-13). 一个类似的论证就证明了(9-14).

现在我们能够来证明定理 9-3 的结论 2 了. 假定 $u\in C^\infty(\overline{G})$ 是方程(9-3)，(9-4)的一个解. 于是对于所有的 $v\in\mathscr{D}$，我们有

$$(f, v)=(P(x, D)u, v)=(u, P'(x, D)v) \qquad (9\text{-}16)$$

因为 u 和 v 都属于 $\mathscr{D}$，所以没有边界积分. 在应用分部积分公式的时候，每个中间的表达式都是形式

$$\sum_{|\mu|+|\nu|\leqslant m}(C_{\mu\nu}D^\nu u, D^\mu v)$$

因为或者 $|\mu|\leqslant r$ 或者 $|\nu|\leqslant r$，所以当进行分部积分时，不会出现边界积分(见 1-3 节). 审查一下等式(9-16)就证明了，$f\perp N'$ 是方程(9-3)，(9-4)有一个解的必要条件.

其次，假定 $f\perp N'$. 注意到存在常数 c，使得

$$c^{-1}\|v\|_m\leqslant\|P'(x, D)v\|\leqslant c\|v\|_m, \qquad v\in M' \qquad (9\text{-}17)$$

(推论 9-9 和不等式 9-8). 因为 M' 是 H 的一个闭子空间，M' 本身是一个带有 $H^m(G)$ 的范数的 Hilbert 空间. 从(9-17)，我们知道，若我们用

$$(P'(x, D)u, P'(x, D)v) \qquad (9\text{-}18)$$

来代替 $H^m(G)$ 的内积，M' 仍然是一个 Hilbert 空间. 于是，(v, f) 是 M' 上一个有界线性泛函. 因为，由(9-17)，

$$|(v, f)|\leqslant\|v\|\|f\|\leqslant c\|f\|\|P'(x, D)v\|$$

因此，由 Fréchet-Riesz 表示定理(1-5 节定理 1-5)，存在一个 $g\in M'$，使得

$$(v, f)=(P'(x, D)v, P'(x, D)g), \ v\in M' \qquad (9\text{-}19)$$

我们断言等式(9-19)不仅对所有的 $v\in M'$ 成立，而且对于所有的 $v\in H$ 也成立. 就是在这里要用到假设 $f\perp N'$. 因为 N' 是有限维的，N' 是 $L^2(G)$ 的一个闭子空间(7-4 节的引理 7-12). 由投影

定理(1-5 节定理 1-3),每个 $v\in H$ 可以写成形式 $v=v'+v''$,其中 $v'\in N'$,而 $v''\perp N'$. 根据定义, $v''\in M'$. 因此,若 $f\perp N'$,由等式(9-19),我们有

$$(f, v)=(f, v'')=(P'(x, D)g, P'(x, D)v'')$$
$$=(P'(x, D)g, P'(x, D)v)$$

因此,对于所有的 $v\in N$, (9-19)成立. 因为我们假定 $f\in C^\infty(\overline{G})$,我们可以应用定理 9-5 来推出结论: $u=P'(x, D)g$ 属于 $\mathscr{D}$. 于是,一个简单的论证就证明了 u 是方程(9-3), (9-4)的一个解. 这就完成了证明.

若我们现在把 $P(x, D)$ 换成 $P'(x, D)$,我们得到

推论 9-10 对于 $g\in C^\infty(\overline{G})$,当且仅当 $g\perp N$ 时(即, $g\in M$),

$$P'(x, D)v=g, \text{在 } G \text{ 中} \tag{9-20}$$

存在一个解 $v\in\mathscr{D}$.

在证明定理 9-3 的其余部分时,我们要利用定理 9-4 和 9-5 的某些进一步的推论.

引理 9-11 若 $u\in M$,并且

$$(u, P'(x, D)v)=0, \quad v\in\mathscr{D} \tag{9-21}$$

则 $u=0$.

证明 设 g 是 $C^\infty(\overline{G})$ 中的任一函数.则 $g=g'+g''$,其中 $g'\in M$ 而 $g''\in N$ (投影定理). 因为 $N\subset C^\infty(\overline{G})$, 所以我们有 $g'\in C^\infty(\overline{G})$. 由推论 9-10, 存在一个 $v\in\mathscr{D}$, 使得 $P'(x, D)v=g'$. 因为 $u\perp N$,由等式(9-21)我们有

$$(u, g)=(u, g')=(u, P'(x, D)v)=0$$

因此 u 和每个 $g\in C^\infty(\overline{G})$ 正交. 因为 $C^\infty(\overline{G})$ 在 $L^2(G)$ 中稠密(4-6 节引理 4-17),我们必须有 $u=0$.

引理 9-12 若 $u\in L^2(G)$ 满足等式(9-21),则 $u\in N$.

证明 由投影定理,我们有 $u=u'+u''$,其中 $u'\in M$ 而 $u''\in N$. 但对于 $v\in\mathscr{D}$,

$$(u'', P'(x, D)v)=(P(x, D)u'', v)=0$$

因此 $$(u', P'(x, D)v)=0, \quad v\in\mathscr{D}$$

由引理 9-11, 这就蕴含着 $u'=0$. 因此 $u=u''\in N$. 证毕.

现在我们可以给出定理 9-3 的结论 3 的证明了. 假定 u 和 f 都是定理 9-3 结论 3 中所述的函数. 显然 $f\perp N'$. 因此, 由结论 2, 存在函数 $u_0\in\mathscr{D}$, 使得 $P(x, D)u_0=f$. 分部积分, 我们有

$$(u_0, P'(x, D)v)=(f, v),\ v\in\mathscr{D}$$

从等式(9-5)减去这个等式, 我们得到

$$(u-u_0, P'(x, D)v)=0,\ v\in\mathscr{D}$$

这就蕴含着 $u-u_0\in N$(引理 9-12). 因为 $N\subset\mathscr{D}$, 所以我们知道 $u\in\mathscr{D}$, 并且 u 是方程(9-3)的一个解. 这就完成了证明.

类似的推理给出结论 4. 因此定理 9-3 为定理 9-4 和 9-5 所蕴含.

9-3 局 部 化

现在我们转到定理 9-5 的证明. 证明的思想如下. 可微性是局部性质. 因此, 为了证明 $u\in C^\infty(\overline{G})$, 只要证明每个点 $x^0\in\overline{G}$ 被包含在一个邻域 $\mathscr{N}$ 中, 使得 $u\in C^\infty(\mathscr{N}\cap\overline{G})$ 就行了.

首先, 我们来考虑内点. 若 u 满足定理 9-5 的假设, 对于 $\varphi\in C_0^\infty(G)$, 我们有

$$\begin{aligned}(u, P(x, D)P'(x, D)\varphi)&=(P'(x, D)u, P'(x, D)\varphi)\\&=(f, \varphi)\end{aligned}\tag{9-22}$$

显然, $P(x, D)P'(x, D)$ 是一个 $2m$ 阶椭圆算子(验证这点!). 因为椭圆算子是形式次椭圆算子(3-1 节引理 3-2), (9-22)式的任何弱解属于 $C^\infty(G)$ (3-1 节定理 3-1). 因此, 满足定理 9-5 的假设的每个函数属于 $C^\infty(G)$. 所以剩下来只需要研究边界点就行了.

设 x^0 是 ∂G 上的一个点. 由 9-1 节所给出的光滑性的定义, 存在 x^0 的一个邻域 $\mathscr{N}$ 和定义中给出的满足(a)到(d)的函数 Φ. 于是, 对于在 $\mathscr{N}$ 外等于 0 的那些 $v\in\mathscr{D}$, 等式(9-10)成立自不待言. 对于 $x\in\mathscr{N}\cap\overline{G}$, 令 $y=\Phi(x)$, $\tilde{f}(y)=Jf(x)$, $\tilde{u}(y)=u(x)$, 其中 J 是变换的 Jacobi 行列式. 由假设, J 属于 $C^\infty(\overline{\mathscr{N}})$, 并且

有一大于 0 的正下界. 令

$$\widetilde{P}(y, D_y)=J^{1/2}P(x, D_x) \tag{9-23}$$

其中 D_y 表示关于坐标 y 的微商. 容易验证, 当 $P(x, D)$ 是纯椭圆算子时, $\widetilde{P}(y, D_y)$ 也是纯椭圆算子. 因此, 等式(9-10)蕴含着

$$(\widetilde{P}(y, D_y)\tilde{u}(y), \widetilde{P}(y, D_y)w(y))=(f, w), w\in\mathscr{D}_{1/2} \tag{9-24}$$

(见 8-4 节关于 $\mathscr{D}_R$ 和 H_R 的定义). 设 ζ 是 C_0^∞ 中的一个函数, 它在 $\sigma_{1/2}$ 上等于 1 并在 $\sigma_{3/4}$ 外等于零. 于是, $\zeta\tilde{u}$ 属于 H_1. 而且, 等式(9-24)给出

$$(\widetilde{P}(y, D_y)\zeta\bar{u}, \widetilde{P}(y, D_y)w)=(f, w), w\in\mathscr{D}_{1/2}$$

因为属于 $\mathscr{D}_{1/2}$ 中的函数在 $\sigma_{1/2}$ 外等于零, 而在 $\sigma_{1/2}$ 内 $\zeta u=u$. 现在我们能够应用 8-7 节的定理 8-24 了. 显然, $\tilde{f}\in C^\infty(\bar{\sigma}_1)$. 因此, 由此立即推出, 存在一个 $R>0$, 使得 $\tilde{u}\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$. 映射回去, 我们知道, $u\in C^\infty(\mathscr{N}_1\cap\bar{G})$, 其中 $\mathscr{N}_1=\Phi^{-1}(\sigma_R)$, 是 x^0 的一个邻域. 因为 x^0 是 ∂G 的任意点, 由此推出 $u\in C^\infty(\bar{G})$. 而且, 如果我们把 8-7 节的推论 8-27 应用到 $\tilde{u}$ 上去, 我们就知道 $\tilde{u}$ 的所有阶数 $<r$ 的导数在 $\partial_0\sigma_R$ 上等于零. 映射回去, 我们就知道 u 的所有这些导数在 $\mathscr{N}_1\cap\partial G$ 上等于零. 因此, 由此推出 $u\in\mathscr{D}$.

其次, 令 $v=J^{1/2}P(x, D)u$, 则 $v\in C^\infty(\bar{G})$, 并且等式(9-24)给出

$$(\tilde{v}, \widetilde{P}(y, D_y)w(y))=(f, w), w\in\mathscr{D}_{1/2}$$

在 8-2 节中已经证明过, 这就蕴含着 $\tilde{v}$ 的所有阶数小于 r 的导数在 $\partial_0\sigma_R$ 上等于零. 这还蕴含着 v 的这些导数在 $\partial G\cap\mathscr{N}_1$ 上等于零. 因此, $P(x, D)u$ 也属于 $\mathscr{D}$.

因为 $P'(x, G)$ 在 $\bar{G}$ 中是纯椭圆的, 并且它的系数属于 $C^\infty(\bar{G})$, 所以我们知道用 $P'(x, D)$ 代替 $P(x, D)$ 时, 定理也成立. 这就完成了证明.

9-4 一些引理

在证明定理 9-4 之前, 我们给出一些技术性的引理, 在证明定

理 9-4 的这种不等式时它们是有用的. 和通常一样, 我们用 Ω 来表示 E^{n+1} 中的半空间 $t>0$.

引理 9-13 若 $v\in H^{m,0}(\Omega)$, 并且在 σ_R 外等于零, 则存在只依赖于 m 的一个常数 c, 使得

$$c^{-1}|v|_{m,0}\leqslant\|v\|_m\leqslant c|v|_{m,0} \tag{9-25}$$

证明 从 8-4 节的不等式 (8-37) 和 (8-41) 可直接推出这些不等式.

引理 9-14 设 G 和 G_1 是有界区域, 并假定存在一个 $\overline{G}$ 到 $\overline{G}_1$ 上的一对一的映射 Φ, 使得 Φ 和 Φ^{-1} 都是无穷次可微的. 于是, 存在一个只依赖于 m, G 和 Φ 的常数 c, 使得

$$c^{-1}\|u\|_m^G\leqslant\|\tilde{u}\|_m^{G_1}\leqslant c\|u\|_m^G,\quad u\in H^m(G) \tag{9-26}$$

其中 $\tilde{u}$ 是由 $\tilde{u}(\Phi(x))=u(x)$ 定义的.

本引理是定义的简单推论.

引理 9-15 设 G 是一个有界光滑区域. 则对于每个 $m>0$ 和每个 $\varepsilon>0$, 存在一个常数 K, 使得

$$\|u\|_{m-1}\leqslant\varepsilon\|u\|_m+K\|u\|,\ u\in H^m(G) \tag{9-27}$$

在证明这个引理时, 我们将利用

引理 9-16 设 G 是一个有界、光滑区域. 设 $V_1, \cdots, V_q$ 是盖住 $\overline{G}$ 的开集合, 即

$$\overline{G}\subset\bigcup_1^q V_k$$

则存在一个从属于这个覆盖的 C^∞ 单位分解. 这就是说, 存在非负函数 $\zeta_1, \cdots, \zeta_q$ 使得 $\zeta_k\in C_0^\infty(V_k)$, 并且

$$\sum_{k=1}^q\zeta_k(x)=1,\ x\in G$$

证明 因为 V_k 是开集合, 我们可以找到更小的开集合 U_k, 使得 $\overline{U}_k\subset V_k$, 并且 U_k 也盖住 $\overline{G}$ (验证这点). 对于每个 k, 令 φ_k 是 $C_0^\infty(V_k)$ 中的一个非负函数, 它在 U_k 中不等于零(见 1-3 节). 然后, 我们令

$$\zeta_k=\frac{\varphi_k}{\sum\limits_{j=1}^{q}\varphi_j},\ 1\leqslant k\leqslant q \tag{9-28}$$

容易验证 ζ_k 具有所要的性质。

现在我们可以给出

引理 9-15 的证明 因为 G 是光滑的,所以对于每个 $x\in\partial G$, 存在一个邻域 $\mathscr{N}$ 和一个满足 9-1 节中(a)到(d)的映射 Φ. 因为 ∂G 是有界的,可以用有限个这样的邻域,例如 $\mathscr{N}_1, \cdots, \mathscr{N}_q$, 盖住 ∂G. 它们和一个使得 $\overline{G}_0\subset G$ 的区域 G_0 一起, 构成一个 $\overline{G}$ 的有限开覆盖(证明这点). 由引理 9-16, 存在一个从属于这个覆盖的一个 C^∞ 单位分解 $\zeta_1, \cdots, \zeta_{q+1}$(我们取 $\zeta_{q+1}\in C_0^\infty(G_0)$). 令 $G_k=G\cap\mathscr{N}_k$, 又令 u 是 $H^m(G)$ 中的任一函数. 令 $u_k=\zeta_k u$. 那么,我们有

$$\begin{aligned}\|u\|_{m-1}^{G}&\leqslant\sum\|u_k\|_{m-1}^{G_k}\leqslant c\sum\|\tilde{u}_k\|_{m-1}^{\sigma_1}\leqslant c_1\sum\|\tilde{u}_k\|_{m-1}^{\sigma_1}\\&\leqslant c_2\sum|u_k|_{m-1,0}\leqslant\sum(\varepsilon|\tilde{u}_k|_{m,0}+K|u_k|_{0,0})\\&\leqslant c_3\sum(\varepsilon\|\tilde{u}_k\|_m^{\sigma_1}+K\|\tilde{u}_k\|^{\sigma_1})\leqslant c_4\sum(\varepsilon\|u_k\|_m^{G_k}+K\|u_k\|^{G_k})\\&\leqslant c_5(\varepsilon\|u\|_m^{G}+K\|u\|^{G})\end{aligned}$$

其中我们已经用了 8-8 节的引理 8-33 和引理 9-13 和 9-14. 我们还做了一个无害的假设, 即 G 包含在 Ω 中. 最后一个不等式证明了引理.

9-5 不 等 式

现在我们可以给出定理 9-4 的一个证明. 我们的第一步是证明该定理其实是局部性的.

引理 9-17 不等式 (9-9) 成立的一个必要充分条件是每个点 $x^0\in\overline{G}$ 有一个邻域 $\mathscr{N}$, 使得

$$\|u\|_m\leqslant C(\|P(x, D)u\|+\|u\|),\ u\in\mathscr{D}\cap C_0^\infty(\mathscr{N}) \tag{9-29}$$

证明 这个条件显然是必要的. 为证明它是充分条件, 假定每个 $x^0\in\overline{G}$ 有这样一个邻域. 因为 G 是有界的, 所以存在有限个这样的邻域, 它们盖住 $\overline{G}$, 把它们叫做 $\mathscr{N}_1, \cdots, \mathscr{N}_q$. 设 $\zeta_1, \cdots, \zeta_q$ 是

从属于这个覆盖的一个 C^∞ 单位分解(引理 9-16), 又设 u 是 $\mathscr{D}$ 中任何一个函数. 于是, $\zeta_k u\in\mathscr{D}\cap C_0^\infty(\mathscr{N}_k)$, 并且由(9-29)和引理 9-15, 有

$$\begin{aligned}\|u\|_m=\|\sum\zeta_k u\|&\leqslant\sum\|\zeta_k u\|\\&\leqslant c_1\sum(\|P(x,\ D)(\zeta_k u)\|+\|\zeta_k u\|)\\&\leqslant c_2\sum\|\zeta_k P(x,\ D)u\|+K\|u\|_{m-1}\\&\leqslant\frac{1}{2}\|u\|_m+c_3(\|P(x,\ D)u\|+\|u\|)\end{aligned}$$

这就证明了对于 $u\in\mathscr{D}$, (9-9)成立. 通过完备化就知道, 对于所有的 $u\in H$, (9-9)成立. 这就完成了证明.

从引理 9-17 立即推出, 为了证明定理 9-4 只要证明: 每个 $x^0\in\overline{G}$ 有一个邻域 $\mathscr{N}$, 使得(9-29)成立. 首先, 假定 x^0 是一个内点. 于是我们可以取 $\mathscr{N}$ 如此之小, 使得 $\mathscr{N}$ 和边界不相交. 于是(9-29)可从下面的引理 9-18 推得.

引理 9-18 若 $P(x,\ D)$ 在 $x^0\in G$ 是椭圆型的并且具有连续系数, 则存在邻域 $\mathscr{N}$, 使得

$$\|u\|_m\leqslant C(\|P(x,\ D)u\|+\|u\|),\ u\in C_0^\infty(\mathscr{N})\tag{9-30}$$

证明 由 2-4 节的不等式(2-44), 存在常数 c_4, 使得

$$|v|_m\leqslant c_4(|P(D)v|_0+|v|_{m-1}),\ v\in S$$

其中 $P(D)=P(x^0,\ D)$. 因为范数 $|\ \ |_m$ 和 $\|\ \ \|_m$ 在 $C_0^\infty(G)$ 上是等价的(引理 9-8), 这就给出

$$\|u\|_m\leqslant c_5(\|P(D)u\|+\|u\|_{m-1}),\ u\in C_0^\infty(G)$$

现在 $$P(x,\ D)=P(D)+\sum_{|\mu|\leqslant m}b_\mu(x)D^\mu$$

其中 $b_\mu(x)$ 都是连续的并且在 x^0 处等于零. 因此, 存在邻域 $\mathscr{N}$, 使得

$$\|P(x,\ D)u-P(D)u\|\leqslant\frac{1}{2}c_5\|u\|_m$$

因此,

$$\|u\|_m\leqslant c_6(\|P(x,\ D)v\|+\|u\|_{m-1}),\ u\in C_0^\infty(\mathscr{N})$$

而且, 由引理 9-15, 存在常数 K, 使得

$$c_6\|u\|_{m-1}\leqslant\frac{1}{2}\|u\|_m+K\|u\|$$

把这些不等式结合起来,我们得到(9-30). 这就证明了引理 9-18.

为了完成定理 9-4 的证明,我们只需要考虑边界点. 设 x^0 是 ∂G 上的一个点. 根据 9-1 节中给出的光滑性的定义,存在 x^0 的一边邻域 $\mathscr{N}$ 以及满足 9-1 节中给出的 (a) 到 (d) 的一个函数 Φ. 用等式(9-23)定义 $\widetilde{P}(y, D_y)$. 于是,由 8-4 节的定理 8-6, 存在一个常数 c_7, 使得

$$|w|_{m,0}\leqslant c_7(\|\widetilde{P}(y, D_y)w\|+\|w\|),\ w\in\mathscr{D}_1$$

由引理 9-14, 这就蕴含着

$$\|u\|_m\leqslant c_8(\|P(x, D)u\|+\|u\|),\ u\in\mathscr{D}\cap C_0^\infty(\mathscr{N})$$

这就是所要的不等式. 因此,就完成了定理 9-4 的证明.

9-6 强椭圆算子

一个算子 $P(x, D)$ 在一个区域 G 中称为强椭圆的,如果存在一个光滑函数 $\gamma(x)$,使得对于每个 $x\in\overline{G}$ 和每个实向量 $\xi\neq 0$, 有

$$\mathrm{Re}\gamma(x)p(x, \xi)>0 \tag{9-31}$$

其中 $p(x, \xi)$ 是 $P(x, \xi)$ 的主部. 显然,一个强椭圆算子都是椭圆算子(见 3-1 节). 可能不那么显然的是

引理 9-19 每个强椭圆算子是纯椭圆算子.

证明 因为当 $n>2$ 时, 每个椭圆算子是纯椭圆算子 (引理 9-1), 我们只需要对 $n=2$ 证明引理. 然而,我们的证明将对任意的 n 成立. 固定 $x\in\overline{G}$, 而且令

$$p(\xi)=\gamma(x)p(x, \xi)$$

我们必须证明 m 是偶数,并且对每一对线性无关的实向量 ξ, η, z 的多项式

$$Q(z)=p(\xi+z\eta) \tag{9-32}$$

恰好有 $m/2$ 个带正虚部的根. 令

$$p_1(\xi)=\mathrm{Re}p(\xi),\ p_2(\xi)=\mathrm{Im}\,p(\xi),\ \xi\in E^n$$

于是(9-31)说明对于每个实向量$\xi \neq 0$，有

$$p_1(\xi)>0 \tag{9-33}$$

因为 $$p_1(-\xi)=(-1)^m p_1(\xi)$$

这就证明了m是偶数．而且，由(9-33)可推出多项式

$$Q_0(z)=p_1(\xi+z\eta)$$

没有实根．因为该多项式的系数都是实数，它的根一定是以共轭对的形式出现的．因此，它恰好有$m/2$个带正虚部的根．其次，考虑多项式

$$Q_s(z)=p_1(\xi+z\eta)+isp_2(\xi+z\eta) \tag{9-34}$$

当s是实数时，由(9-33)，$Q_s(z)$没有实根．这些多项式的系数对s都是连续的，并且z^m的系数是

$$p_1(\eta)+isp_2(\eta)$$

对于实的s，它的模有正的下界．因此，当$s\to 0$时，$Q_s(z)$的根收敛到$Q_0(z)$的根(4-4节引理4-14)．因为$Q_s(z)$不可能有实根，所以当$s\to 0$时，$Q_s(z)$的根都不能穿过实轴．因此，对于每个实的s，$Q_s(z)$的位于实轴上面的根的个数必须等于$Q_0(z)$的位于实轴上面的根的个数．特别是，当$s=1$时也是这样．因为$Q_0(z)$恰好有$m/2$个根位于实轴之上，因此$Q(z)$一定也是这样的情形．这就完成了证明．

我们指出，存在非强椭圆的纯椭圆算子．一个简单的例子是与

$$P(x,\ \xi)=\xi_1^4+\xi_2^4-\xi_3^4+i(\xi_1^2+\xi_2^2)\xi_3^2 \tag{9-35}$$

相应的算子，它在E^3中是纯椭圆的，但不是强椭圆的．

强椭圆算子的重要性由下面的定理9-20显示出来．

定理 9-20 若$P(x,\ D)$满足(9-31)，则存在常数R，使得

$$[P(x,\ D)+\overline{\lambda\gamma(x)}]u=f \tag{9-36}$$

对于每个$f\in C^\infty(\overline{G})$和每个$\lambda>R$有唯一解$u\in\mathscr{D}$．

定理的证明基于下面的属于Gårding的引理(1953)．

引理 9-21 若$P(x,\ D)$满足(9-31)，则存在常数$c_0>0$和K，使得

$$\operatorname{Re}(\gamma(x)P(x,\ D)u,\ u)\geqslant c_0\|u\|_r^2-K\|u\|^2 \qquad (9\text{-}37)$$

对于所有的 $u\in\mathscr{D}$ 成立.

我们将在 9-7 节中证明这个引理. 现在我们来证明怎么能够用它来给出

定理 9-20 的证明　因为 $P(x,\ D)$ 是纯椭圆算子，所以只要证明：当用 $P(x,\ D)+\lambda\bar{\gamma}$ 代替 $P(x,\ D)$ 时，$N=N'=\{0\}$ (定理 9-3) 就行了. 因为 $\gamma(x)$ 是 $\bar{G}$ 上的光滑函数，并且在 $\bar{G}$ 上不等于零 (否则 (9-31) 不能成立)，所以存在正常数 ρ，使得在 G 上 $|\gamma(x)|\geqslant\rho$. 设 λ 是任何大于 $(K+1)/\rho^2$ 的数，并且令

$$P_1(x,\ D)=\gamma(x)P(x,\ D)+\lambda|\gamma(x)|^2$$

于是，由 (9-37)

$$\operatorname{Re}(P_1(x,\ D)u,\ u)\geqslant\|u\|_r^2,\ u\in\mathscr{D} \qquad (9\text{-}38)$$

这就证明了满足 $P_1(x,\ D)u=0$ 的唯一的 $u\in\mathscr{D}$ 是 $u=0$. 而且 (9-38) 给出

$$\operatorname{Re}(u,\ P_1'(x,\ D)u)\geqslant\|u\|_r^2,\ u\in\mathscr{D}$$

因此，满足 $P_1'(x,\ D)u=0$ 的唯一的 $u\in\mathscr{D}$ 是 $u=0$. 设 f 是 $C^\infty(\bar{G})$ 中的任何函数. 则由定理 9-3，存在

$$P_1(x,\ D)u=\gamma f$$

的唯一解 $u\in\mathscr{D}$. 两端除以 γ，我们得到方程 (9-36). 这就完成了证明.

9-7　Gårding 不等式

现在我们给出引理 9-21 的证明. 由分部积分，对于 $u,\ v\in\mathscr{D}$，有

$$\begin{aligned}(\gamma(x)P(x,\ D)u,\ v)&=b(u,\ v)\\&=\sum_{|\mu|,\ |\nu|\leqslant r}(b_{\mu\nu}(x)D^\nu u,\ D^\mu v)\end{aligned} \qquad (9\text{-}39)$$

注意到不出现任何边界积分项，因为在每一步，作用到 v 上去的是阶数小于 r 的求导运算. 还注意到

$$\operatorname{Re}\sum_{|\mu|=|\nu|=r} b_{\mu\nu}(x)\xi^{\mu+\nu}=\gamma(x)p(x, \xi) \tag{9-40}$$

设 x^0 是 $\bar{G}$ 的一点，且令

$$b_0(u, v)=\sum_{|\mu|, |\nu|\leqslant r}(b_{\mu\nu}(x^0)D^\nu u, D^\mu v)$$

我们有

引理 9-22 存在常数 $c_0>0$ 和 K，使得

$$\operatorname{Re} b_0(u)\geqslant c_0\|u\|_r^2-K\|u\|^2, \ u\in\mathscr{D}$$

其中 $b_0(u)\equiv b_0(u, u)$.

引理 9-23 存在 x^0 的一个邻域 $\mathscr{N}$，使得

$$|b(u)-b_0(u)|\leqslant\frac{1}{2}c_0\|u\|_r^2, \ u\in C_0^\infty(\mathscr{N}) \tag{9-41}$$

其中 $b(u)=b(u, u)$.

暂时把这些引理的证明搁一下，我们来说明怎么能应用这些引理来证明引理 9-21. 由引理 9-23，每个 x^0 有一个邻域 $\mathscr{N}$ 使得(9-41)成立. 因为 $\bar{G}$ 是紧的，所以可以用有限个这种$\mathscr{N}$——譬如说与点 x^1, …, x^q 相对应的 $\mathscr{N}_1$, …, $\mathscr{N}_q$——盖住 $\bar{G}$. 设 ζ_1, …, ζ_q 是一个从属于这个覆盖的单位分解 C^∞ (引理 9-16). 令 $u_k=\zeta_k u$. 因为对于实数 α_k,

$$\left(\sum_1^q\alpha_k\right)^2\leqslant q\sum_1^q\alpha_k^2 \tag{9-42}$$

成立. 由引理 9-22 和 9-23 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\sum b(u_k)&\geqslant\frac{1}{2}\sum c_k\|u_k\|_r^2-\sum K_k\|u_k\|^2\\&\geqslant c_0\|u\|_r^2-K\|u\|^2\end{aligned} \tag{9-43}$$

其中 $c_0=\min c_k/2q$ 而 K 充分大. 其次注意到

$$b(u)-\sum b(u_k)=\sum_{\substack{|\mu|, |\nu|\leqslant r\\|\mu|+|\nu|<m}}(c_{\mu/\nu}(x)D^\nu u, D^\mu u) \tag{9-44}$$

这是另一个分部积分的练习. 由引理 9-15，存在常数 C，使得

$$|b(u)-\sum b(u_k)|\leqslant\frac{1}{2}c_0\|u\|_r^2+C\|u\|^2$$

把这和(9-43)结合起来就给出

$$\operatorname{Re} b(u) \geqslant \frac{1}{2} c_0 \|u\|_r^2 - (K+C)\|u\|^2$$

由不等式(9-31),这正好就是我们所要的.

现在我们转到

引理 9-22 的证明　只要证明

$$\operatorname{Re} b_0(v) \geqslant c_0 |v|_r^2 - K\|v\|^2, \ v \in H^r \tag{9-45}$$

就够了. 因为由引理 9-8, 对每个 $v \in \mathscr{D}$, $\hat{v} \in H^r$, 并且等式(9-12)成立. 因此,(9-45)蕴含着引理 9-22. 而且,(9-45)为

$$\operatorname{Re} b_0(v) \geqslant c_0 |v|_r^2 - K\|v\|^2, \ v \in S \tag{9-46}$$

所蕴含,因为 S 在 H^r 中稠密. 所以,只要证明(9-46)就够了. 然而,(9-46)等价于

$$c_0 \int (1+|\xi|)^m |Fv|^2 d\xi$$

$$\leqslant \int [\operatorname{Re} \sum b_{\mu\nu}(x^0) \xi^{\mu+\nu} + K] |Fv|^2 d\xi$$

由等式(9-40)和不等式(9-31), 存在常数 $a>0$, 使得

$$\operatorname{Re} \sum_{|\mu|=|\nu|=r} b_{\mu\nu}(x^0) \xi^{\mu+\nu} \geqslant a|\xi|^m \tag{9-47}$$

另一方面, 存在常数 C, 使得

$$\left| \sum_{|\mu|+|\nu|<m} b_{\mu\nu}(x^0) \xi^{\mu+\nu} \right| \leqslant C(1+|\xi|)^{m-1}$$

因此,一切都化归为证明: 存在常数 $c_0>0$ 和 K, 使得

$$c_0(1+|\xi|)^{m-1} \leqslant a|\xi|^m + K, \ \xi \in E^n \tag{9-48}$$

这就完成了证明.

引理 9-23 的证明　我们有

$$|b(u) - b(u_0)| \leqslant \max_{x \in \bar{\mathscr{N}}} \sum |b_{\mu\nu}(x) - b_{\mu\nu}(x^0)| \|u\|_r^2$$

由系数的连续性, 我们可以选 $\mathscr{N}$ 如此之小使得这个最大值想要多小就能多小.

9-8　强解和弱解

在第五章的一开始我们定义了 Cauchy 问题的强解. 类似地,

我们可定义 Dirichlet 问题的强解．对于 $f\in L^2(G)$，若存在 $\mathscr{D}$ 中的一个函数序列 $\{u_k\}$，使得

$$u_k\to u,\ P(x,\ D)u_k\to f,\ \text{在 } L^2(G) \text{ 中} \tag{9-49}$$

我们就说 $u\in L^2(G)$ 是方程(9-3)和(9-4)的一个强解．和 Cauchy 问题的情形不同，我们有

定理 9-24 函数 $u\in L^2(G)$ 是方程(9-3)，(9-4)的强解，当且仅当 $u\in H$ 并且满足方程(9-3)．

证明 若 $u\in H$，则在 $\mathscr{D}$ 中存在一个函数序列 $\{u_k\}$，它在 $H^m(G)$ 中收敛到 u．由(9-8)，在 $L^2(G)$ 中 $P(x,\ D)u_k\to P(x,\ D)u$．若 u 满足(9-3)，我们知道(9-49)成立．反之，假定 $\{u_k\}\subset\mathscr{D}$ 满足(9-49)．由(9-9)

$$\|u_j-u_k\|_m\leqslant C(\|P(x,\ D)(u_j-u_k)\|+\|u_j-u_k\|)\to 0$$

因此，存在一个 $w\in H$，使得在 $H^m(G)$ 中 $u_k\to w$．特别地，u_k 在 $L^2(G)$ 中收敛到 w．因此 $u=w$ a.e. 根据上面的推理，方程(9-3)成立．

定理 9-25 若 $f\in L^2(G)$ 并且 $f\perp N'$，则存在一个 $u\in M$，u 满足方程(9-3)．

证明 在 $C^\infty(\overline{G})$ 中存在一个函数序列 $\{f_k\}$，它在 $L^2(G)$ 中收敛到 f. 我们写作 $f_k=f'_k+f''_k$，其中 $f'_k\perp N'$ 而 $f''_k\in N'$. 因为 $N'\subset C^\infty(\overline{G})$，我们有 $f'_k\in C^\infty(\overline{G})$．而且

$$\|f'_k-f\|^2+\|f''_k\|^2=\|f_k-f\|^2\to 0$$

因此，在 L^2 中 $f'_k\to f$．由定理 9-1，存在一个函数 $u_k\in\mathscr{D}$，使得 $P(x,\ D)u_k=f'_k$.

其次，我们记 $u_k=u'_k+u''_k$，其中 $u'_k\in M$ 而 $u''_k\in N$．因此，我们有 $P(x,\ D)u'_k=f'_k$. 由推论 9-9，

$$\|u'_j-u'_k\|_m\leqslant C\|f'_j-f'_k\|\to 0$$

因为 M 是 $H^m(G)$ 的闭子空间，存在一个 $u\in M$，使得在 $H^m(G)$ 中 $u'_k\to u$．显然，u 满足方程(9-3)．这就完成了证明．

如同我们对 Cauchy 问题的情形所做过的那样，我们可以定义 Dirichlet 问题的弱解．对于 $f\in L^2(G)$，我们将说 $u\in L^2(G)$ 是

方程(9-3)，(9-4)的一个弱解，如果

$$(u,\ P'(x,\ D)v)=(f,\ v),\ v\in\mathscr{D} \tag{9-50}$$

因为

$$(P(x,\ D)v,\ w)=(v,\ P'(x,\ D)w),\qquad v,\ w\in\mathscr{D} \tag{9-51}$$

由等式(9-16)，易见每个强解都是弱解．若 $f\in C^\infty(\overline{G})$，定理 9-3 说每个弱解属于 $\mathscr{D}$；若只知道 f 属于 $L^2(G)$，我们不能说出那么强的结论，但是我们有

定理 9-26 方程(9-3)，(9-4)的每个弱解是强解．

证明 若 u 满足等式(9-50)，我们有 $u=u'+u''$，其中 $u'\perp N'$，$u''\in N$．因此 u' 也是弱解．于是，等式(9-50)蕴含着 $f\perp N'$．因此，由定理 9-25，存在一个 $w\in M$，使得 $P(x,\ D)w=f$．因此，w 也是一个弱解，从而

$$(u'-w,\ P'(x,\ D)v)=0,\ v\in\mathscr{D}$$

由引理 9-11，$u'=w$．由此

$$u=w+u''\in H \text{ 并且 } P(x,\ D)u=P(x,\ D)(w+u'')=f$$

这就完成了证明．

9-9 例外集

定理 9-20 说，只要 $P(x,\ D)$是强椭圆型的并且 λ 充分大，则对于每个 $f\in C^\infty(\overline{G})$，方程(9-36)有唯一解 $u\in\mathscr{D}$．若我们应用定理 9-25，我们有

定理 9-27 若 $P(x,\ D)$是强椭圆型的，则只要 λ 充分大，对于每个 $f\in L^2(G)$，方程(9-36)有唯一解 $u\in H$．

我们将证明得稍多一点．我们将证明

定理 9-28 若 $P(x,\ D)$是强椭圆型的，则至多存在一个没有有限极限点的复数的可数集 Γ，使得每当 λ 不属于 Γ 时，方程(9-36)对于每个 $f\in L^2(G)$ 有唯一解 $u\in H$．

在证明本定理时，我们将利用下面两个事实．

引理 9-29 假定 S 是一个从 $L^2(G)$ 到 H 中的有界线性算子，则 S 是一个从 $L^2(G)$ 到自身的紧算子．

引理 9-30 若 K 是一个从 Hilbert 空间到自身的紧线性算子，则使得

$$(I-\lambda K)u=0 \tag{9-52}$$

有非零解的点 λ 所构成的集合是可数的并且没有有限极限点.

定理 9-28 是这两个引理的简单推论. 事实上，设 R 是定理 9-20 中给出的数. 那么，对于每个 $f\in L^2(G)$，方程

$$[P(x,\ D)+2R\,\overline{\gamma(x)}]u=f$$

有唯一解 $u\in H$. 如果我们把 u 定义为 Sf，我们知道 S 是一个从 $L^2(G)$ 到 H 的线性算子. 根据推论 9-9，这个算子是有界的. 因此，由引理 9-29，S 是 $L^2(G)$ 上的一个紧算子. 于是，若

$$[P(x,\ D)+\lambda\,\bar{\gamma}(x)]u=0$$

则

$$[I+(\lambda-2R)S\,\bar{\gamma}(x)]u=0$$

若 $u\neq 0$，则 λ 应属于一个没有任何有限极限点的可数集. 同样的推理证明了

$$[P'(x,\ D)+\bar{\lambda}\gamma(x)]v=0$$

只能对属于这样的集合的 λ 才有解 $v\neq 0$. 现在我们应用定理 9-25 来达到想要的结论.

引理 9-29 的证明　设 $\{u_k\}$ 是 $L^2(G)$ 中的一个有界序列. 则 $\{Su_k\}$ 是 H 中的一个有界序列. 由引理 9-8，对于每个 $v\in\mathscr{D}$，$\hat{v}\in H^r$，并且等式(9-12)成立. 于是，对于每个 k，存在一个 $w_k\in\mathscr{D}$，使得

$$\|w_k-Su_k\|_m<\frac{1}{k}$$

因此，$\{\hat{w}_k\}$ 是 H^r 中的一个有界序列. 和在引理 9-8 的证明中那样，这就蕴含着存在一个子序列 $\{\hat{w}_{k_j}\}$，它在 L^2 中收敛. 显然，这就蕴含着在 $L^2(G)$ 中 $\{Su_{k_j}\}$ 是收敛的.

引理 9-30 的证明　假定引理不对. 那么就应该存在一个由不同的复数构成的序列 $\{\lambda_k\}$，使得

$$|\lambda_k|\leqslant C$$

还存在一个非零元素的序列 $\{u_k\}$，使得

$$(I-\lambda_k K)u_k=0$$

首先，我们断言 u_k 是线性无关的(见 4-3 节)．因为，如其不然的话，就应该存在一个整数 j，使得

$$u_{j+1}=\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_j u_j$$

而 $v_1, \cdots, u_j$ 是线性无关的．令 $\beta_k=1/\lambda_k$ (注意没有一个 λ_k 会等于零)．于是

$$(K-\beta_k)u_k=0$$

因此
$$K u_{j+1}=\alpha_1 \beta_1 u_1+\cdots+\alpha_j \beta_j u_j$$

而
$$\beta_{j+1} u_{j+1}=\alpha_1 \beta_{j+1} u_1+\cdots+\alpha_j \beta_{j+1} u_j$$

因此
$$\alpha_1(\beta_{j+1}-\beta_1)u_1+\cdots+\alpha_j(\beta_{j+1}-\beta_j)u_j=0$$

因为 $u_1, \cdots, u_j$ 是线性无关的，所有的系数必须为零．因为 β_k 是都不相同的，这就意味着所有的 α_k 都等于零．因此 $u_{j+1}=0$，这是与我们的假设相矛盾的．因此，u_k 是线性无关的．

设 L_k 是由 $u_1, \cdots, u_k$ 张成的子空间．那么对于每个 k，L_k 是一个闭子空间(7-4 节引理 7-12)．因为 u_k 是线性无关的，L_{k-1} 是 L_k 的真子空间．因此，存在一个元素 $w_k \in L_k$，使得

$$\|w_k\|=1, w_k \perp L_{k-1}$$

(1-5 节推论 1-4)．K 把 L_k 映射到它自身．因为若

$$u=\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_k u_k$$

必有
$$K u=\alpha_1 \beta_1 u_1+\cdots+\alpha_k \beta_k u_k$$

还注意到

$$(K-\beta_k)u=\alpha_1 \beta_1 u_1+\cdots+\alpha_{k-1} \beta_{k-1} u_{k-1}$$

因此，$K-\beta_k$ 把 L_k 映射到 L_{k-1}．现在，若 $j>k$，则我们有

$$\begin{aligned} K(w_j-w_k) &= (K-\beta_j)w_j-K w_k+\beta_j w_j \\ &= \beta_j[w_j-\lambda_j(K w_k-(K-\beta_j)w_j)] \end{aligned}$$

现在 $K w_k \in L_k \subset L_{j-1}$，而 $(K-\beta_j)w_j$ 属于 L_{j-1}．因此

$$\|K(w_j-w_k)\| \geqslant |\beta_j| \geqslant \frac{1}{C}$$

这就证明了 $\{K w_j\}$ 不可能有一个收敛的子序列，与假定 K 是紧的这一事实相矛盾．因此这样的序列 $\{\lambda_k\}$ 不可能存在．　证毕．

在下面某一节中，我们将更仔细地来讨论例外集 Γ．

习　　题

9-1 若 ∂G 是光滑的，试证明 $C^\infty(\overline{G})$ 是由 C_0^∞ 中的函数在 G 上的限制所组成.

9-2 证明引理 9-2.

9-3 证明 $P(x, D)$ 在 $\overline{G}$ 中是纯椭圆型的，当且仅当 $P'(x, D)$ 在 $\overline{G}$ 中是纯椭圆型的.

9-4 证明椭圆算子的积是椭圆算子.

9-5 证明引理 9-14.

9-6 证明引理 9-16 的证明中的第一个断言.

9-7 证明由方程(9-28)给出的函数是一个从属于覆盖$\{U_k\}$的单位分解.

9-8 试说明怎样去求得在引理 9-15 的证明中所叙述的子区域 G_1.

9-9 证明由等式 (9-23)给出的算子是纯椭圆的当且仅当 $P(x,D)$ 是纯椭圆的.

9-10 证明由等式(9-35)给出的算子是纯椭圆型的但不是强椭圆型的.

9-11 证明不等式(9-42).

9-12 证明等式(9-44).

9-13 证明不等式(9-47).

9-14 证明不等式(9-48).

第十章　一般边值问题

10-1　问题的陈述

因为在解有界区域上的 Dirichlet 问题时我们曾经是如此之成功，所以我们很想知道是否可以把我们的结果推广到更一般的边值问题．本章我们将证明推广某些定理是可能的，但是为了做这种推广工作，我们必须处理几个新的问题．

第一个问题是如何表示我们的边界条件．在第六章和第七章中，我们用常系数偏微分算子来描述在一个超平面上的边界条件．当我们处理曲面的时候，我们必须小心．我们将假定边界条件的形式为

$$Q_j(x,\ D)u(x)=0,\ 在\ \partial G\ 上,\ 1\leqslant j\leqslant r \qquad (10\text{-}1)$$

其中 Q_j 是系数定义在整个 $\overline{G}$ 上的偏微分算子．若系数只定义在 ∂G 上，这就等价于假定可以把这些系数光滑地开拓到内部．当然，如果 Q_j 的系数和 ∂G 都充分光滑的话，这种开拓总是可以的．

第二个问题是怎样构成共轭问题．对于 Dirichlet 问题这是简单的，这就是对于 $P(x,\ D)$ 的形式共轭 $P'(x,\ D)$ 提出由同样的边界条件组成的问题(见 9-1 节定理 9-3)．然而，在一般情形，共轭问题不一定有和(10-1)同样的形式的边界条件，更说不上是由同样的算子构成的了．有几种妥善处理这个问题的方法，而我们选择最简单的一种方法．我们将求得形为(10-1)的边界条件的一个子类，它们具有以下性质：共轭边界条件由同样形式的边界条件组成，虽然它们通常包含不同的算子．我们称这个类为正规边界条件．在 8-3 节中我们碰到过一种特殊情形．在 10-4 节中我们将更充分地讨论它们．和 Dirichlet 问题的情形一样，可以借助于一个不等式和一个正则性定理来证明主要的定理．这个不等式和正则性定理

和一个关于共轭边界条件的定理一起将在 10-3 节中叙述. 它们的证明在 10-4 到 10-6 节中给出. 在 10-2 节到 10-6 节中, 所有的问题都是在半球 σ_R 中考虑的. 本章的剩余部分将证明这个特殊情形怎么能给出完全的解答.

现在我们来陈述这个主要结果. 假设如下:

(a) G 是带有光滑边界 ∂G 的有界区域(见 9-1 节).

(b) $P(x, D)$ 是一个系数属于 $C^\infty(\overline{G})$, 阶数 $m=2r$ 的纯椭圆算子.

(c) $Q_1(x, D), \cdots, Q_r(x, D)$ 都是系数属于 $C^\infty(\overline{G})$, 阶数 $m_j<m$ 的偏微分算子, 使得

(i) m_j 是不同的

(ii) 若 $q_j(x, D)$ 是 $Q_j(x, D)$ 的主部, 则当 $\chi_0\in\partial G$ 并且 $\nu\neq 0$ 在点 χ_0 处正交于 ∂G 时 $q_j(\chi_0, \nu)\neq 0$.

(d) 若 $\chi_0\in\partial G$, $\xi\neq 0$ 在 χ_0 处平行于 ∂G, 并且 $\nu\neq 0$ 在 χ_0 处正交于 ∂G, 则 z 的多项式

$$q_1(\chi_0, \xi+z\nu), \cdots, q_r(\chi_0, \xi+z\nu)$$

是模

$$p(z)=(z-\tau_1(\xi, \nu))\cdots(z-\tau_r(\xi, \nu))$$

线性无关的, 其中 $\tau_k(\xi, \nu)$ 是

$$p(\chi_0, \xi+z\nu)=0 \tag{10-2}$$

的具有正虚部的根(见 6-7 节).

若 Q_j 满足(c), 则边界算子组 $\{Q_j\}$ 称为**正规的**. 若 Q_j 满足(d), 则说 $\{Q_j\}$ **盖住** P. 我们将证明

定理 10-1 在上面的假设下,

1. 存在一个由 r 个边界算子构成的正规组 $\{Q'_j\}$, 它盖住 $P(x, D)$ 的形式共轭 $P'(x, D)$, 并且使得 $u\in C^\infty(\overline{G})$ 满足 (10-1) 的充要条件是

$$(u, P'v)=(Pu, v) \tag{10-3}$$

对于所有满足

$$Q'_j(x, D)v(x)=0, \text{在 } \partial G \text{ 上}, 1\leqslant j\leqslant r \tag{10-4}$$

的 v 成立. 反之, $v\in C^\infty(\overline{G})$ 满足(10-4)的充要条件是对于所有满足(10-1)的 $u\in C^\infty(\overline{G})$ 等式(10-3)成立.

2. 存在常数 C, 使得对于所有满足(10-1)的 $u\in C^\infty(\overline{G})$

$$\|u\|_m\leqslant C(\|Pu\|+\|u\|) \tag{10-5}$$

成立.

3. 设 N 是由满足(10-1)和 $Pu=0$ 的那些 $u\in C^\infty(\overline{G})$ 构成的集合, 而 N' 是由满足(10-4)和 $P'v=0$ 的那些 $v\in C^\infty(\overline{G})$ 构成的集合, 则 N 和 N' 都是有限维的.

4. 对于 $f\in C^\infty(\overline{G})$, 存在一个满足(10-1)和 $Pu=f$ 的 $u\in C^\infty(\overline{G})$ 的充要条件是 $f\perp N'$. 类似地, 对于 $g\in C^\infty(\overline{G})$, 存在一个满足(10-4)和 $P'v=g$ 的 $v\in C^\infty(\overline{G})$ 的充要条件是 $g\perp N$.

5. 若 $u\in L^2(G)$, $f\in C^\infty(\overline{G})$, 并且

$$(u,\ P'v)=(f,\ v) \tag{10-6}$$

对于所有满足(10-4)的 $v\in C^\infty(\overline{G})$ 成立, 则 $u\in C^\infty(\overline{G})$ (在一个零测集上修改函数值后)并且满足(10-1)和 $Pu=f$.

本章专门用来证明定理10-1. 在10-2节至10-4节中问题限于半球 σ_R 上. 然后, 在10-5节到10-9节中我们说明怎样利用所得到的这个结果去处理一般的区域. 许多技巧在前几章中都已经用过, 并且不需要更多的新的技巧.

本章的结果属于 Schechter(1964 和 1959b).

10-2 在 σ_R 中的问题

如同我们在第八章所做过的那样, 我们首先研究在区域 σ_R 中的问题. 因此, 我们要去求

$$P(\chi,\ t,\ D)u(\chi,\ t)=f(\chi,\ t),\ \text{在 } \sigma_R \text{ 中} \tag{10-7}$$

$$Q_j(\chi,\ 0,\ D)u(\chi,\ 0)=g_j(\chi),\ |\chi|<R,\ 1\leqslant j\leqslant r \tag{10-8}$$

的解. 和以前一样, 我们假定 $P(\chi,\ t,\ D)$ 是 $m=2r$ 阶纯椭圆算子(见6-9节). 其次我们取 f 和 g_j 为无穷次可微函数. 最好的情形是当方程(10-7), (10-8)对每一种 f 和 g_j 的选择有一解. 显然,

这样的情形不能发生，除非对每一种 g_j 的选择，存在一个满足(10-8)的 $u\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$. 而且，8-3 节的引理 8-4 给出了发生这种情形的一个充分条件，即 Q_j 可以被作为 Dirichlet 组的一部分. 根据定义我们有

引理 10-2 算子 Q_j 可以被作为 Dirichlet 组的一部分，当且仅当 Q_j 的阶数 m_j 都是不同的，而且在 $Q_j(\chi, 0, D)$ 中 $D_t^{m_j}$ 的系数在 $\partial_0\sigma_R$ 上不等于零.

具有这种性质的算子组被称为是正规的. 如果我们假定 Q_j 形成一个正规组，我们可以找到一个满足(10-8)的函数 u_0, 并减掉这个函数. 这样做将改变函数 f, 但将把边界条件 (10-8) 化为

$$Q_j(\chi, 0, D)u(\chi, 0)=0, \ |\chi|<R, 1\leqslant j\leqslant r \qquad (10\text{-}9)$$

如果我们能解用 $f-P(\chi, t, D)u_0$ 代替 f 的问题(10-7)和(10-9), 把这个解加上 u_0, 我们就得到问题(10-7), (10-8)的一个解. 因此，考虑问题(10-7), (10-9)就足够了. 我们总是假定 Q_j 的阶数 m_j 都小于 m.

如果我们遵循前两章的方法，我们需要对本问题定义一个弱解. 为了这样做，我们需要与 8-2 节等式(8-13)相当的一个等式. 下面的定理就是为了这个目的. 设 $\mathscr{C}_R$ 表示 $C^\infty(\bar{\sigma}_R)$ 中在 $\partial_1\sigma_R$ 附近等于零的那些函数的集合. 我们有

定理 10-3 设 $Q_1, \cdots, Q_r$ 是阶数小于 m 的算子的一个正规组. 则存在一个正规组 $Q'_1, \cdots, Q'_r$, 使得 $v\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$ 对所有满足(10-9)的 $u\in\mathscr{C}_R$ 满足

$$(P(x, t, D)u, v)=(u, P'(x, t, D)v) \qquad (10\text{-}10)$$

的充要条件是

$$Q'_j(x, 0, D)v(x, 0)=0, \ |x|<R, 1\leqslant j\leqslant r \qquad (10\text{-}11)$$

这是下面的定理的一个容易得到的推论.

定理 10-4 若 $Q_1, \cdots, Q_m$ 是一个 m 阶Dirichlet 组，则存在一个 m 阶 Dirichlet 组 $Q'_1, \cdots, Q'_m$, 使得对于 $u\in\mathscr{C}_R$ 和 $v\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$,

$$(P(x, t, D)u, v)-(u, P'(x, t, D)v)$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial_0\sigma_R} Q_j(x, 0, D)u\,\overline{Q'_{m-j+1}(x, 0, D)v}dx \tag{10-12}$$

成立.

证明　我们可以假定 Q_j 是 $j-1$ 阶的. 由 8-3 节定理 8-2,

$$D_t^{j-1}=\sum_{k=1}^{j}\Lambda_{jk}(\chi, D_x)Q_k(\chi, 0, D), 1\leqslant j\leqslant m \tag{10-13}$$

其中 Λ_{jk} 满足在 8-3 节中所规定的条件. 如果我们把 (10-13) 代入 8-2 节的等式(8-10), 我们得知等式(10-12)的左端等于

$$-i\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial_0\sigma_R}\sum_{k=1}^{j}\Lambda_{jk}(x, D_x)Q_k(x, 0, D)u\,\overline{N_jv}\,dx$$
$$=-i\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j}\int_{\partial_0\sigma_R}Q_k(x, 0, D)u\,\overline{\Lambda'_{jk}(x, D_x)N_jv}dx$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\int_{\partial_0\sigma_R}Q_k(x, 0, D)uQ'_{m-k+1}(x, 0, D)vdx$$

其中 Λ'_{jk} 是 Λ_{jk} 的形式共轭, 并且

$$Q'_{m-k+1}(\chi, t, D)=i\sum_{j=1}^{m}\Lambda'_{jk}(\chi, D_x)N_j, 1\leqslant k\leqslant m \tag{10-14}$$

于是, N_j 构成了一个 Dirichlet 组. 而且 N_j 的阶数是 $m-j$. 因此 Q'_j 的阶数 $<j$. Q'_j 中 D_t^{j-1} 的系数是 $\overline{\Lambda}_{m-j+1, m-j+1}a_{0,m}$, 它是一个非零函数. 因此, Q'_j 构成了一个 m 阶 Dirichlet 组.　　证毕.

现在我们准备来定义问题(10-7), (10-9)的弱解. 设 V_R 是由满足(10-9)的那些 $u\in\mathscr{C}_R$ 构成的集合, 又设 V'_R 是由满足(10-11)的那些 $v\in\mathscr{C}_R$ 构成的集合. 假定 $u, f\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$ 使得

$$(u, P'(\chi, t, D)v)=(f, v), v\in V'_R \tag{10-15}$$

那么我们断言 u 满足方程(10-7)和(10-9). 第一部分就象在 8-2 节中那样得到验证. 为了证明第二部分, 设 ζ 是 $\mathscr{C}_R$ 中的任何函数. 由 8-3 节的引理 8-4, 存在一个 $v\in\mathscr{C}_R$, 使得

$$Q'_j(\chi, 0, D)v(\chi, 0)=0, \qquad 1\leqslant j\leqslant r$$
$$=\bar{\zeta}Q_{m-j+1}(\chi, 0, D)u(\chi, 0), r\leqslant j\leqslant m$$

把这代入(10-12)并且注意到 $v\in V'_R$, 我们有

$$\sum_{j=1}^{r}\int_{\partial_0\sigma_R}\zeta|Q_j(x,\ 0,\ D)u|^2dx=0$$

因为ζ是任意的，我们知道u满足(10-9)．由于这点，若等式(10-15)成立，我们将说$u\in L^2(\sigma_R)$是问题(10-7)，(10-9)的一个弱解．我们有

定理 10-5 若问题(10-7)，(10-9)的一个弱解属于$C^\infty(\bar{\sigma}_R)$，则该弱解就是一个真解．

满足定理 10-3 的结论的边界算子称为相对于P与Q_j共轭(的算子)．稍后，关于它们我们将要多说一点．目前，我们注意到

引理 10-6 若$\{Q'_j\}$相对于P与$\{Q_j\}$共轭，则$\{Q_j\}$关于P'与$\{Q'_j\}$共轭．

10-3 解 法

上两章的解法每一个都是建立在一个不等式和一个正则性定理的基础上的．这里我们可以同样进行．首先我们来陈述我们的假设．

1．$P(0,\ 0,\ D)$是$m=2r$阶纯椭圆算子(见 6-9 节)．

2．$Q_1,\cdots,Q_r$是阶数$m_j<m$的算子组．

3．若$q_j(x,\ t,\ D)$是$Q_j(x,\ t,\ D)$的主部，则对于E^n中的每个$\xi\neq0$，多项式$q_j(0,\ 0,\ \xi,\ \tau)$是模

$$p_+(\xi,\ \tau)=(\tau-\tau_1(\xi))\cdots(\tau-\tau_r(\xi))\qquad(10\text{-}16)$$

线性无关的，其中$\tau_k(\xi)$是$p(0,\ 0,\ \xi,\ \tau)$的具有正虚部的根．

4．P和Q_j的系数都属于$C^\infty(\bar{\sigma}_R)$．

5．在σ_R中$P(x,\ t,\ D)$是m阶的．

若假设 3 成立，则我们将说Q_j盖住P(见 6-7 节定理 6-15)．我们有

定理 10-7 若假设 1 到 5 成立，则存在常数C和R，使得

$$|u|_{m,0}\leqslant C(\|P(x,\ t,\ D)u\|+\|u\|+\sum_{j=1}^{r}|Q_j(x,\ 0,\ D)u(x,\ 0)|_{m-m_j-1/2}),\ u\in\mathscr{C}_R\qquad(10\text{-}17)$$

注意到范数 $|\cdot|_{j,s}$ 是在 Ω 上取的，而范数 $|\cdot|_s$ 是在 E^n 上取的，E^n 也就是 $\partial\Omega$. 设 $\hat{H}_R$ 表示 $\mathscr{C}_R$ 关于范数 $|\cdot|_{m,0}$ 的完备化. 我们的正则性定理是

定理 10-8 若 $f\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$, $u\in\hat{H}_R$, 并且

$$(P(x, t, D)u, P(x, t, D)v)+\sum_{j=1}^{r}(Q_j(x, 0, D)u(x, 0),$$
$$Q_j(x, 0, D)v(x, 0))_{m-m_j-1/2}=(f, v), v\in\mathscr{C}_R \quad (10\text{-}18)$$

则存在一个 $R'>0$, 使得 $u\in C^\infty(\bar{\sigma}_{R'})$.

和通常一样，在一个零测集上修改函数值后定理 10-18 的结论成立. 我们还将需要一个关于共轭边界条件的定理.

定理 10-9 若边界算子的正规组 $\{Q_j\}$ 盖住 P, 则每一个相对于 P 与之共轭的集合 $\{Q'_j\}$ 盖住 P 的形式共轭 P'.

这个定理将在 10-4 节中证明；将在 10-5 节中证明定理 10-8, 而在 10-6 节中证明定理 10-7. 现在让我们来说明这些定理怎么能帮助解决我们的问题. 如同我们在第八章所做的那样，借助于在 8-4 节中给出的不等式(8-31), 我们可以对 $u\in\hat{H}_R$ 定义 $P(x, t, D)u$. 我们还可以把 $Q_j(x, 0, D)u(x, 0)$ 定义为 $H^{m-m_j-1/2}(E^n)$ 的一个元素. 这可以借助于下面的定理来做到.

定理 10-10 对于 $k\geqslant 1$,

$$|v(x,0)|^2_{s+k-1/2}\leqslant 2|v|^2_{k,s}, \quad v\in S(\Omega) \quad (10\text{-}19)$$

证明 我们采用在 6-7 节中引理 6-17 的证明中用过的同样的技巧. 由 6-6 节的引理 6-14, 对于 $y\in H^1(0, \infty)$,

$$|y(0)|^2\leqslant 2\sum_{j=0}^{1}\int_0^\infty|D^j_\tau y(\tau)|^2 d\tau \quad (10\text{-}20)$$

成立. 令 $t=\tau/(1+|\xi|)$ 和 $y(\tau)=Fv(\xi,t)$. 则 $(1+|\xi|)D_\tau y=D_t y$, 因此

$$|Fv(\xi, 0)|^2\leqslant 2\sum_{j=0}^{1}(1+|\xi|)^{1-2j}\int_0^\infty|D^j_t Fv(\xi, t)|^2 dt \quad (10\text{-}21)$$

若两边乘以 $(1+|\xi|)^{2s+2k-1}$ 并且关于 ξ 积分，我们得到想要的不等式.

推论 10-11 若 $Q(x, t, D)$ 是一个系数在 $S(\Omega)$ 中阶数 $k<m$ 的算子，则

$$|Q(x, 0, D)v(x, 0)|_{s+m-k-1/2}\leqslant C|v|_{m,s} \tag{10-22}$$

证明 若 $a(x)\in S(E^n)$ 并且 $|\mu|\leqslant k$,

$$|a(x)D^\mu v(x, 0)|_{s+m-k-1/2}\leqslant C|D^\mu v|_{m-k,s}\leqslant C|v|_{m,s}$$

从这个推论我们看到，当 v 属于 $H^{m,0}(\Omega)$ 时，我们可以把 $Q_j(x, 0, D)v(x, 0)$ 定义为 $H^{m-m_j-1/2}(E^n)$ 中的一个元素．设 $\hat{N}_R$ 是由那样一些 $u\in\hat{H}_R$ 构成的集合，它们满足(10-9)和

$$P(x, t, D)u=0, \text{在 } \sigma_R \text{ 中} \tag{10-23}$$

又设 $\hat{N}'_R$ 是满足(10-11)和

$$P'(x, t, D)v=0, \text{在 } \sigma_R \text{ 中} \tag{10-24}$$

的那些 $v\in\hat{H}_R$ 构成的集合．和在第八章中一样，我们有

推论 10-12 对于充分小的 R, $\hat{N}_R$ 和 $\hat{N}'_R$ 是有限维的．

证明和 8-4 节的定理 8-5 的(在 8-6 节末给出的)证明是一样的．

推论 10-13 若 $u\in\hat{N}_R$，则存在一个 $R'>0$，使得 $u\in C^\infty(\bar{\sigma}_{R'})$.

这是定理 10-8 的一个直接推论．

推论 10-14 若 $v\in\hat{N}'_R$，则存在一个 $R'>0$，使得 $v\in C^\infty(\bar{\sigma}_{R'})$.

证明 因为 $P'(0, 0, D)=\bar{P}(0, 0, D)$，它是纯椭圆型的．根据定理 10-9, Q'_j 盖住 P'．因此，我们可以应用推论 10-13.

定理 10-15 若 $f\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$ 并且 $f\perp\hat{N}'_R$，则存在一个 $R'>0$ 和一个函数 $u\in C^\infty(\bar{\sigma}_{R'})$，使得方程(10-7)，(10-9)在 $\sigma_{R'}$ 中成立．

证明 我们仿照 8-7 节定理 8-26 的证明．令

$$\begin{aligned}((u, v))=&(P'(x, t, D)u, P'(x, t, D)v)\\&+\sum(Q'_j(x, 0, D)u(x, 0),\\&\quad Q'_j(x, 0, D)v(x, 0))_{m-m_j-1/2}\end{aligned} \tag{10-25}$$

设 M 是使 $u\perp\hat{N}'_R$ 的那些 $u\in\hat{H}_R$ 构成的集合．由定理 10-7 和推论 10-12，我们有

$$|u|^2_{m,0}\leqslant C((u, u)), u\in M \tag{10-26}$$

(见 8-4 节定理 8-10 的证明)．因此，M 是关于内积(10-25)的一

个 Hilbert 空间．因此，存在一个 $w\in M$，使得

$$((w,v))=(f,\ v),v\in M \tag{10-27}$$

因为 $f\perp\hat{N}'_R$，对于所有的 $v\in\hat{H}_R$，(10-27)成立．现在定理10-8 告诉我们，对于某个 $R'>0$，$u\in C^\infty(\bar{\sigma}_{R'})$．令 $u=P'(x,\ t,\ D)w$．则 $u\in C^\infty(\bar{\sigma}_{R'})$，而 u 是方程(10-7)在 $\sigma_{R'}$ 中的一个解．因此，方程(10-10)对于所有的 $v\in V'_R$成立．由于引理 10-6，这就蕴含着 u 满足方程(10-9)．

10-4 共 轭 组

在本节中我们给出定理 10-9 的证明．如果 $v\in C^\infty(\bar{\sigma}_R)$满足

$$Q_j(x,\ 0,\ D)v(x,\ 0)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant p \tag{10-28}$$

的充要条件是

$$\tilde{Q}_j(x,\ 0,\ D)v(x,\ 0)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant q \tag{10-29}$$

的话，就把两个组 $Q_1,\cdots,Q_p$，和 $\tilde{Q}_1,\cdots,\tilde{Q}_q$ 叫做等价的．我们将证明等价的正规组包含同样个数的算子(即 $p=q$)，并证明在每个组的算子中间正好可找到有同样阶的算子．事实上，我们有

引理 10-16 设 m_j，$\tilde{m}_j$ 分别表示 Q_j 和 $\tilde{Q}_j$ 的阶数．若组是正规且等价的，则 $p=q$ 并且集合$\{m_j\}$和$\{\tilde{m}_j\}$是相同的．而且，存在一个算子集合$\{A_{jk}(x,\ D_x)\}$，使得

$$\tilde{Q}_j(x,\ 0,\ D)=\sum_{j=1}^{k}A_{jk}(x,\ D_x)Q_k(x,\ 0,\ D) \tag{10-30}$$

并且

(a) 对于 $\tilde{m}_j=m_k$，A_{jk} 是一个非零函数．

(b) A_{jk} 的阶数 $\leqslant\tilde{m}_j-m_k$．

(和通常一样，(b)被解释为，若 $\tilde{m}_j<m_k$ 就意味着 $A_{jk}=0$．)

证明 根据引理 10-2，Q_j 被包含在一个 Dirichlet 组$\{Q''_j\}$中．根据 8-3 节的推论 8-3，

$$\tilde{Q}_j(x,\ 0,\ D)=\sum A_{jk}(x,\ D_x)Q''_k(x,\ 0,\ D)$$

其中

(a′) 对于 $\widetilde{m}_j=m''_k$, Λ_{jk} 是一个非零函数.

(b′) Λ_{jk} 的阶数 $\leqslant\widetilde{m}_j-m''_k$.

我们断言,若 Q''_k 不是原来的 Q_j 中的一个,对于每个 i, $\Lambda_{ik}=0$, 因为,若 $\Lambda_{jk}\neq0$, 就应该存在一个 $g\in C_0^\infty(\partial_0\sigma_R)$, 使得 $\Lambda_{ik}g\neq0$. 由 8-3 节的引理 8-4, 存在一个 $v\in\mathscr{C}_R$, 使得

$$\begin{aligned}Q''_j(x,\ 0,\ D)v(x,\ 0)&=0,\quad j\neq k\\&=g,\quad j=k\end{aligned}$$

因为 Q''_k 不在 Q_j 中, 所以 v 满足方程(10-28). 但是 $\widetilde{Q}_i(x,0,D)v=\Lambda_{ik}g\neq0$, 与两个组是等价的这一事实相矛盾. 从这个事实我们还看到, 若 Q''_k 不是 Q_j 中的一个, 则没有 Q_i 可以有和 Q''_k 一样的阶数. 因为这样的话, Λ_{ik} 应该是一个非零函数, 与我们刚才证明过的事实相矛盾. 因此, $\widetilde{m}_j$ 可以在 m_k 中找到. 交换两个组, 我们知道 m_j 只在 $\widetilde{m}_k$ 中被找到. 这就证明了引理.

其次令 $P(x,\ t,\ D)$ 是一个 m 阶纯椭圆算子. 我们有

引理 10-17 若一个正规组 $\{Q_j\}$ 盖住 $P(x,\ t,\ D)$, 则每个等价的正规组也盖住 $P(x,\ t,\ D)$.

证明 根据定义, 多项式 $q_j(0,\ 0,\ \xi,\ \tau)$ 是模 $p_+(\xi,\ \tau)$ 线性无关的(见 10-3 节). 若 $\{\widetilde{Q}_j\}$ 是任何等价组, 则等式 (10-30) 成立. 设 $\lambda_{jk}(x,\ D_x)$ 是 Λ_{jk} 的主部. 则等式(10-30)蕴含着

$$\widetilde{q}_j(0,\ 0,\ \xi,\ \tau)=\sum\lambda_{jk}(0,\ \xi)q_k(0,\ 0,\ \xi,\ \tau)\qquad(10\text{-}31)$$

其中

(a″) 对于 $\widetilde{m}_j=m_k$, λ_{jk} 是一个非零常数.

(b″) $\lambda_{jk}(0,\ \xi)$ 的次数 $\leqslant\widetilde{m}_j-m_k$.

假定存在常数 α_j, 使得 $\sum\alpha_j\widetilde{q}_j(0,\ 0,\ \xi,\ \tau)$ 是 $p_+(\xi,\ \tau)$ 的一个倍数. 则

$$\sum_k\Big(\sum_j\alpha_j\lambda_{jk}(0,\ \xi)\Big)q_k(0,\ 0,\ \xi,\ \tau)$$

同样是 $p_+(\xi,\ \tau)$ 的一个倍数.

根据假设, 这就蕴含着

$$\sum_j\alpha_j\lambda_{jk}(0,\ \xi)=0,\ 对每个\ k\qquad(10\text{-}32)$$

根据(a″)和(b″)，这就依次蕴含着 α_j 等于零. 因此 $\tilde{Q}_j$ 也盖住 P.

下面的引理是定义的平凡的推论.

引理 10-18 若 P 是一个 $m=2r$ 阶算子并且 $Q_1,\cdots,Q_r$ 是一个正规组，则所有相对于 P 和 $\{Q_j\}$ 共轭的组 $\{Q'_j\}$ 都是等价的.

现在我们可以给出

定理 10-9 的证明 根据引理 10-17 和 10-18，只要求得一个相对于 P 和 $\{Q_j\}$ 共轭的盖住 P' 的组就行了. 由引理 10-2, Q_j 包含在一个 m 阶 Dirichlet 组中. 根据定理 10-4，存在一个 Dirichlet 组 $\{Q'_j\}$，使得等式(10-12)成立. 用 $u(\lambda x, \lambda t)$, $v(\lambda x, \lambda t)$ 代替 u, v, 并令 $\lambda\to\infty$. 这给出

$$
\begin{aligned}
&(p(0,\ 0,\ D)u,\ v)-(u,\ p'(0,\ 0,\ D)v)\\
&\qquad=\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial_0\sigma_R} q_j(0,\ 0,\ D)u\overline{q'_{m-j+1}(0,\ 0,\ D)v}dx
\end{aligned}
\tag{10-33}
$$

其次，设 $\xi\in E^n$, $\varphi\in C_0^\infty(E^n)$，以及 $g,h\in C_0^\infty(E^1)$. 令

$$
u(x,\ t)=e^{i\xi x}\varphi(\lambda x)g(t),\quad v(x,\ t)=e^{i\xi x}\varphi(\lambda x)h(t)
$$

代入等式(10-33)且令 $\lambda\to 0$. 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty(p(0,\ 0,\ \xi,\ D_t)g(t)\ \overline{h(t)}-g(t)\ \overline{p'(0,\ 0,\xi,\ D_t)h(t)})dt\\
&\quad=\sum_{j=1}^{m}q_j(0,\ 0,\ \xi,\ D_t)g(0)\ \overline{q'_{m-j+1}(0,\ 0,\ \xi,\ D_t)h(0)}
\end{aligned}
\tag{10-34}
$$

令 $\xi\neq 0$ 固定，又假定 $h(t)$ 是

$$
p'(0,\ 0,\ \xi,\ D_t)h(t)=0\quad t>0 \tag{10-35}
$$

$$
q'_j(0,\ 0,\ \xi,\ D_t)h(0)=0\quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{10-36}
$$

的一个解.

由 6-4 节的定理 6-8，存在一个 $g\in S(0,\ \infty)$，使得

$$
p(0,\ 0,\ \xi,\ D_t)g(t)=h(t)\quad t>0 \tag{10-37}
$$

$$
q_j(0,\ 0,\ \xi,\ D_t)g(0)=0\quad 1\leqslant j\leqslant r \tag{10-38}
$$

代入等式(10-34)，我们得到

$$
\int_0^\infty|h(t)|^2dt=0
$$

这就证明了 $h(t)=0$. 因此方程(10-35), (10-36)的每个解恒等于零. 由 6-4 节, $q'_j(0, 0, \xi, \tau)$是模 $p'_+(\xi, \tau)$线性无关的. 这就证明了 Q'_j 盖住 P'. 显然, 它们是相对于 P 与 $\{Q_j\}$ 共轭的. 因此, 定理证毕.

推论 10-19 一个正规组盖住 P 当且仅当每个相对于 P 与该正规组共轭的正规组盖住 P'.

10-5 正则性定理

在本节中我们给出定理 10-8 的证明. 很幸运, 这在 8-9 节几乎做过了. 在现在这个情形中, 我们取$[u, v]$作为等式(10-18)的左端, 代替 $\mathscr{D}_R$ 和 H_R 我们要处理的是 $\mathscr{C}_R$ 和 $\hat{H}_R$. 主要的一步是验证在新的条件下 8-9 节的引理 8-34 成立, 因为当我们知道它成立时, 证明的进行几乎和 8-9 节中所做的完全一样. 在证明中间不等式(10-17)代替了 8-4 节的定理 8-13.

为了证明 8-9 节中的不等式(8-89), 我们在引理 8-34 的证明中列举的事实里加上两条:

5. 对每个实的 s,

$$(\delta_i^h w(x, 0), v(x, 0))_s=(w(x, 0), \delta_i^{-h} v(x, 0))_s \tag{10-39}$$

6. 对于光滑函数 $a(x)$和实数 s,

$$|(aw(x, 0), v(x, 0))_s-(w(x,0), av(x, 0))_s|\leqslant C|w|_{s-1}|v|_s \tag{10-40}$$

其中常数 C 只依赖于 a 和 s.

在证明 5 和 6 之前, 我们来证明怎样利用它们来得到想要的不等式. 注意到只要证明(用 8-9 节的记号), 对于 $|\rho|, |\sigma|<m-k$,

$$(aD^\rho\delta_i^h D_x^\mu \zeta u(x, 0), D^\sigma v(x, 0))_{k+1/2} \sim (aD^\rho u(x, 0), D^\sigma D_x^\mu \zeta \delta_i^{-h} v(x, 0))_{k+1/2} \tag{10-41}$$

就够了. 由 5, 6 和定理 10-10, (10-41)的左端是

$$\sim (D^\rho \delta_i^h D_x^\mu \zeta u,\ \bar{a} D^\sigma v)_{k+1/2} = (D^\rho D_x^\mu \zeta u,\ \delta_i^{-h}(\bar{a} D^\sigma v))_{k+1/2}$$

$$= (D^\rho D_x^\mu \zeta u,\ \bar{a}\delta_i^{-h} D^\sigma v + D^\sigma v(x_i^{-h})\delta_i^{-h}\bar{a})_{k+1/2}$$

$$\sim (\delta_i^h a D^\rho D_x^\mu \zeta u,\ D^\sigma v)_{k+1/2}$$

$$\sim (\delta_i^h a \zeta D^\rho D_x^\mu u,\ D^\sigma v)_{k+1/2}$$

$$\sim (\delta_i^h \zeta D_x^\mu a D^\rho u,\ D^\sigma v)_{k+1/2}$$

$$\sim (D_x^\mu a D^\rho u,\ \zeta \delta_i^{-h} D^\sigma v)_{k+1/2}$$

$$\sim (D_x^\mu a D^\rho u,\ D^\sigma \zeta \delta_i^{-h} v)_{k+1/2}$$

$$= (a D^\rho u,\ d_x^\rho D^\sigma \zeta \delta_i^{-h} v)_{k+1/2}$$

这就证明了在新的条件下引理 8-34 成立．现在我们就可以和 8-7 节定理 8-24 的证明一样来进行证明了．

剩下要证明 5 和 6．前者是简单的，因为根据定义容易证明

$$F(\delta_i^h v) = \frac{1}{h}(e^{i\xi_i h} - 1)Fv. \tag{10-42}$$

为证明 6，令 $\rho(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$，并对实的 s 由

$$FL^s u = \rho^s F u$$

定义算子 L^s．我们有

引理 10-20 对每个 s, t 和 $a \in S$,

$$|L^s(av) - aL^s v|_t \leqslant C_{s,t} |v|_{s+t-1} \int \rho(\xi)^{|s-1|+|t|+1} |Fa(\xi)| d\xi \tag{10-43}$$

证明 由 2-5 节的定理 2-10，我们有

$$(2\pi)^n (L^s(av) - aL^s v)$$

$$= F^{-1} \int [\rho(\xi)^s - \rho(\xi - \eta)^s] Fu(\xi - \eta) Fu(\eta) d\eta \tag{10-44}$$

因此，它的 H^t 范数是有界的，且为

$$\int |[\rho(\cdot)^s - \rho(\cdot - \eta)^s] Fu(\cdot - \eta)|_t |Fa(\eta)| d\eta$$

$$= \int |\rho(\cdot + \eta)^t [\rho(\cdot + \eta)^s - \rho(\cdot)^s Fu(\cdot)|_0 |Fa(\eta)| d\eta \tag{10-45}$$

所界住．但是，由 3-4 节的(3-48)和(3-49)，

$$|\rho(\xi+\eta)^s-\rho(\xi)^s|\leqslant C\rho(\xi)^{s-1}\rho(\eta)^{|s-1|+1} \tag{10-46}$$

并且

$$\rho(\xi+\eta)^t\leqslant\rho(\xi)^t\rho(\eta)^{|t|} \tag{10-47}$$

利用这些估计，我们看到等式(10-45)为(10-43)的右端所界住．这就完成了证明．

推论 10-21 对于 $a\in S$,

$$|(au,\ v)_s-(u,\ \bar{a}v)_s|\leqslant C|u|_{s-t}|v|_{s+t-1} \tag{10-48}$$

其中常数 C 只依赖于 s, t 和 a。

证明 (10-48)的左端是

$$|L^{2s}(au)-aL^{2s}u|_{1-s-t}|v|_{s+t-1}$$

由引理 10-20, 这是为(10-48)的右端界住的．

为证明(10-40), 我们只要在(10-48)中取 $t=0$.

10-6 不 等 式

现在我们给出定理 10-7 的一个证明．因为已有可以使用的结果, 我们的工作是比较简单的．首先, 我们将需要

引理 10-22 对每个整数 $k\geqslant 1$, $s\geqslant 0$, 和 $\varepsilon>0$, 存在常数 K, 使得

$$|u|_{k-1,s}\leqslant\varepsilon|u|_{k,s}+K|u|_{0,s},\quad u\in H^{k,s} \tag{10-49}$$

证明 从不等式(6-129), (6-130)和 6-7 节的定理 6-25 立即得到这个不等式．

现在我们给出

定理 10-7 的证明 由 6-7 节的定理 6-26, 我们有

$$|u|_{m,0}\leqslant C(\|P(0,\ 0,\ D)u\|+\|u\|$$
$$+\sum_{j=1}^{r}|Q_j(0,\ 0,\ D)u(x,\ 0)|_{m-m_j-1/2}) \tag{10-50}$$

现在假定 P 和 Q_j 的系数在 σ_R 中光滑, 特别是通过取 R 充分小, 可以使它们与其在(0, 0)点的值任意接近．设给定 $\varepsilon>0$, 由 3-2 节的引理 3-4 和不等式(10-49),

$$\|[P(x,\ t,\ D)-P(0,\ 0,\ D)]u\|\leqslant\varepsilon|u|_{m,0}+K\|u\| \tag{10-51}$$

并且

$$\sum_{j=1}^{r}|[Q_j(x,\ 0,\ D)-Q_j(0,\ 0,\ D)]u(x,\ 0)|_{m-m_j-1/2}$$
$$\leqslant\varepsilon\sum_{j=0}^{m-1}|D_t^ju(x,\ 0)|_{m-j-1/2}+K\sum_{j=0}^{m-1}|D_t^ju(x,\ 0)|_{m-j-3/2} \tag{10-52}$$

于是，由定理 10-10,

$$|D_t^ju(x,\ 0)|_{m-j-1/2}\leqslant C|u|_{m,0}$$

以及
$$|D_t^ju(x,\ 0)|_{m-j-3/2}\leqslant C|u|_{m-1,0}$$

再应用一次引理 10-22 可以证明(10-52)的左端由 $\varepsilon|u|_{m,0}+K\|u\|$ 界住．若现在我们把这些不等式应用到(10-50)上去，则得到不等式(10-17)，但右端还要加一附加项 $C\varepsilon|u|_{m,0}$．我们取 ε 如此之小使得 $C\varepsilon<\frac{1}{2}$．对于充分小的 R 这就给出了(10-17)．

10-7 全局共轭算子

现在我们转到在 E^n 中任意有界区域 G 中的问题．我们假定 G 的边界 ∂G 是光滑的(见 9-1 节)．设 P 是 $\overline{G}$ 上一个纯椭圆算子，又设 $\{Q_j\}$ 是一个边界算子的正规组，它盖住 P(见 10-1 节)．和通常一样我们假定 P 和 Q_j 的系数都属于 $C^\infty(\overline{G})$．如同我们在 10-2 节中做过的那样，我们将把一个边界算子组 $\{Q'_j\}$ 称为相对于 P 与 $\{Q_j\}$ 共轭，如果，对于所有满足

$$Q_ju=0,\ \text{在 } \partial G \text{ 上，对所有的 } j \tag{10-53}$$

的 $u\in C^\infty(\overline{G})$, $v\in C^\infty(\overline{G})$ 满足

$$(Pu,\ v)=(u,\ P'v) \tag{10-54}$$

的充要条件是

$$Q'_jv=0,\ \text{在 } \partial G \text{ 上，对所有的 } j$$

我们的第一步是去证明

定理 10-23 若 P 和 Q_j 满足上面所作的假设，则存在一个相对于 P 与 $\{Q_j\}$ 共轭的边界算子的正规组．而且每个这样的组盖住 P'．

证明　实际上，定理 10-23 证明的主要部分早就给出了．事实上，

我们可以把定理的证明化为定理 10-3 和推论 10-19. 我们可以完成这步如下. 设 χ_0 是 ∂G 上一个固定点, 又设 D_χ 是行向量

$$D_\chi = -i\left[\frac{\partial}{\partial\chi_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial\chi_n}\right] \tag{10-55}$$

设 R 是一个旋转, 它把在 χ_0 点 ∂G 的内法向变到正 χ_m 轴, 令 $y=R(\chi-\chi_0)$. 容易验证

$$D_\chi = D_y R \tag{10-56}$$

令

$$\hat{P}(y, D_y) = P(\chi, D_\chi) = \sum a_\mu(R'y+\chi_0)(D_yR)^\mu \tag{10-57}$$

其中 R' 是 R 的逆(共轭). 因此

$$\hat{p}(0, \xi) = \sum_{|\mu|=m} a_\mu(\chi_0)(\xi R)^\mu = p(\chi_0, \xi R) \tag{10-58}$$

类似地, 我们令

$$\hat{Q}_j(y, D_y) = Q_j(\chi, D_\chi) \tag{10-59}$$

因此

$$q_j(0, \xi) = q_j(\chi_0, \xi R) \tag{10-60}$$

注意到 ξR 正交于 ∂G 当且仅当 ξ 沿着 χ_m 轴. 其次, 设 $z=\Phi(y)$ 是由

$$z_k = y_k, 1 \leqslant k \leqslant n$$

$$z_n = y_n - \varphi(y_1, \cdots, y_{n-1})$$

给出的变换, 其中 φ 是曲面 ∂G 在 χ_0 的一个邻域中的方程. 注意到

$$\frac{\partial \Phi_j(0)}{\partial y_k} = \delta_{jk} \tag{10-61}$$

并且

$$D_y = D_z d\Phi \tag{10-62}$$

其中 $d\Phi$ 是元素为 $\partial\Phi_j(y)/\partial y_k$ 的矩阵. 令

$$\widetilde{P}(z, D_z) = \hat{P}(y, D_y), \quad \widetilde{Q}_j(z, D_z) = \hat{Q}_j(y, D_y)$$

因此

$$\widetilde{P}(z, D_z) = \sum a_\mu(R'\Psi(z)+\chi_0)(D_z d\Phi R)^\mu$$

其中 $\Psi(z)$ 是 $\Phi(y)$ 的反函数. 由等式 (10-58), (10-60), 和 (10-61), 我们有

$$\widetilde{p}(0, \xi) = p(\chi_0, \xi R), \quad \widetilde{q}_j(0, \xi) = q_j(\chi_0, \xi R) \tag{10-63}$$

这就证明了 $\widetilde{P}$ 和 $\widetilde{Q}_j$ 满足 10-3 节的假设. 因此我们已经证明, 对

每个 $\chi_0\in\partial G$ 存在该点的一个邻域 $\mathscr{N}$ 和 $R>0$，使得可以用一种一对一的 C^∞ 的方式把 $\mathscr{N}\cap\overline{G}$ 映到 $\overline{\sigma}_R$ 上，所以被变换的算子满足 10-3 节的假设 1 到 5. 于是，由定理 10-3，存在 $\overline{\sigma}_R$ 中的一个边界算子组 $\{\widetilde{Q}'_j\}$，它相对于 $\widetilde{P}$ 与 $\{\widetilde{Q}_j\}$ 共轭. 而且，我们可以以一种确定的方式选择这个组. 例如，我们可以只利用适当的 k 阶算子 D_t^k (见定理 10-4) 补充所缺的算子去做出一个 Dirichlet 组. 因为组 $\{Q_j\}$ 是正规的，所缺的阶数不依赖于 χ_0. 因此，我们可以在 σ_R 中唯一地确定 $\widetilde{Q}'_j$. 设 Q'_j 是 $\widetilde{Q}'_j$ 在 $\mathscr{N}\cap\overline{G}$ 中的原象. 不难证明在 $\mathscr{N}\cap\overline{G}$ 中这样定义的算子 Q'_j 与定义在另一个边界点邻域中的相应的算子在任何搭接的区域上是一样的. 因此，Q'_j 是有明确定义的并且在 ∂G 的邻域中是无穷次可微的. 用一个适当的函数——在 ∂G 的邻域中为 1 而在一个内部区域中等于零——乘上 Q'_j，就可以使 Q'_j 的系数属于 $C^\infty(\overline{G})$. 由推论 10-19，$\{\widetilde{Q}'_j\}$ 盖住 $\widetilde{P}'$. 上面的推理证明了 $\{Q'_j\}$ 盖住 P'. 通过把 ∂G 上点的邻域映射到 σ_R 上，由推论 10-19，我们知道任何正规边界算子组也盖住 P'. 这就完成了定理 10-23 的证明.

10-8 边界范数

为了证明定理 10-7 的一个全局性的对应的定理，我们必须引进一个 ∂G 上的边界范数. 这可用几种方法来做. 我们选择了一种从概念上说是最容易的方法，但不那么完美. 若 ∂G 是光滑且有界的，则存在邻域 $\mathscr{N}_1,\cdots,\mathscr{N}_n$，使得可以用 10-7 节中所描述的方式把 $\overline{G}\cap\mathscr{N}_k$ 映射到 $\overline{\sigma}_R$ 上去，并且 ∂G 包含在 $\mathscr{N}_k$ 的并集中. 由 9-4 节的引理 9-16，存在一个从属于这个覆盖的 C^∞ 单位分解. 设 $\{\zeta_k\}$ 是一个带有 $\zeta_k\in C^\infty(\overline{G}\cap\mathscr{N}_k)$ 的单位分解. 对于 $u\in C^\infty(\overline{G})$，$\zeta_k u\in C^\infty(\overline{G}\cap\mathscr{N}_k)$. 在这个映射下，$\zeta_k u$ 变成 $\mathscr{C}_R$ 中的一个函数 $(\zeta_k u)^\sim$. 对于实的 s，我们定义

$$\langle u\rangle_s^2=\sum_{k=1}^{N}|(\zeta_k u)^\sim(\chi,0)|_s^2 \qquad (10\text{-}64)$$

这个范数的一个重要性质由下列引理给出.

引理 10-24 存在常数 C, 使得

$$\langle u\rangle_{m-1/2}\leqslant C\|u\|_m,\quad u\in C^\infty(\overline{G})\tag{10-65}$$

证明 由定理 10-10

$$|(\zeta_k u)^\sim(\chi,\ 0)|_{m-1/2}\leqslant C_1|(\zeta_k u)^\sim|_{m,0}$$

由 9-4 节的引理 9-13 和 9-14, 这由

$$C_2\|(\zeta_k u)^\sim\|_m\leqslant C_3\|\zeta_k u\|_m\leqslant C_4\|u\|_m$$

所界住. 对 k 求和我们得到不等式(10-65).

等式(10-64)给出一个范数, 这是显然的. 引理 10-24 容许我们对 $H^m(G)$ 中的函数, 对 $s=m-1/2$, 定义这种范数. 我们有

定理 10-25 设 P 和 Q_j 满足 10-1 节的假设 (组 $\{Q_j\}$ 不必是正规的), 则存在常数 C, 使得

$$\|u\|_m\leqslant C(\|Pu\|+\sum_j\langle Q_ju\rangle_{m-m_j-1/2}+\|u\|),\ u\in H^mG\tag{10-66}$$

证明 设 χ 是 ∂G 上的一点. 它有一个邻域 M, 使得 $\overline{G}\cap M$ 可以被映射到某个 $R>0$ 的 $\overline{\sigma}_R$ 中去, 并且不等式(10-17)成立. 如果有必要的话, 通过收缩 M, 可以要求 M 包含在定义边界范数时用到的一个 $\mathscr{N}_k$ 中. 因为 ∂G 是有界的, 可以用有限个这样的邻域 $M_1,\cdots,M_k$ 的集合来盖住 ∂G. 设 $\omega_1,\ \cdots,\ \omega_k$ 是一个从属于这个覆盖的 C^∞ 单位分解(见 9-4 节引理 9-16). 在该映射下, $\omega_k u$, P 和 Q_j 变成$(\omega_k u)^\sim$, $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}_j$, 并且 $\widetilde{P}$ 和 $\widetilde{Q}_j$ 满足 10-3 节的假设(见 10-7 节). 因此

$$\begin{aligned}\|(\omega_k u)^\sim\|_m\leqslant C(&\|\widetilde{P}(\omega_k u)^\sim\|+\|(\omega_k u)^\sim\|\\&+\sum_j|\widetilde{Q}_j(\omega_k u)^\sim(\chi,\ 0)|_{m-m_j-1/2})\end{aligned}$$

映射回 $M_k\cap\overline{G}$, 我们得到

$$\|\omega_k u\|\leqslant C(\|P(\omega_k u)\|+\|\omega_k u\|+\sum_j\langle Q_j(\omega_k u)\rangle_{m-m_j-1/2})$$

应用 Leibnitz 法则和 9-4 节的引理 9-15, 我们有

$$\begin{aligned}\|u\|_m=\|\sum\omega_k u\|_m&\leqslant\sum\|\omega_k u\|_m\\&\leqslant C(\|Pu\|+\|u\|+\sum\langle Q_ju\rangle_{m-m_j-1/2})\end{aligned}$$

(见 3-2 节引理 3-4). 这就完成了证明.

10-9 紧性论证

为了证明 N 和 N' 是有限维的，我们利用一个与9-2节的紧性论证类似的紧性论证．我们将需要

引理 10-26 若 $m\geqslant 1$ 并且

$$\|u_k\|_m\leqslant C,\quad k=1,\ 2,\ \cdots \tag{10-67}$$

则 $\{u_k\}$ 在 $L^2(G)$ 中有一个收敛的子序列．

证明 存在一个 ∂G 的开覆盖 $\mathscr{N}_1,\cdots,\mathscr{N}$，使得可以用10-7节中所描述的方法，把 $\overline{G}\cap\mathscr{N}_j$ 映射到 $\bar{\sigma}_R$ 上．与一个内部开集合 $\mathscr{N}_0$ 一起，它们盖住 $\overline{G}$．设 $\{\zeta_j\}$ 是一个从属于这个覆盖的单位分解（参看9-4节引理9-16）．只要证明对每个 j，序列 $\{\zeta_j u_k\}$ 有一个在 $L^2(\overline{G})$ 中收敛的子序列就够了．因为 $\zeta_0 u_k$ 有紧支集，如同在9-2节中一样，由此推得 $\{\zeta_0 u_k\}$ 有这样一个子序列．对于其它的 j 值，设 $(\zeta_j u_k)^\sim$ 是在映到 σ_R 上的映射下的象，则

$$\|(\zeta_j u_k)^\sim\|_m\leqslant C'$$

因此，由于9-4节的引理9-13，

$$|(\zeta_j u_k)^\sim|_{m,0}\leqslant C''$$

于是，由8-6节的定理8-22，$(\zeta_j u_k)^\sim$ 有一个在 $L^2(\sigma_R)$ 中收敛的子序列．因此，$\{\zeta_j u_k\}$ 有一个在 $L^2(G)$ 中收敛的子序列．这就完成了证明．

一旦我们有了引理10-26，N 是有限维的这个性质证明起来就简单了．事实上，设 $\{u_k\}$ 是 N 中的一个函数序列，使得在 $L^2(G)$ 中 $u_k\to u$．由定理10-25，$\{u_k\}$ 是 $H^m(G)$ 中的一个 Cauchy 序列．因此 $u\in H^m(G)$，$Pu=0$，并且 u 满足等式(10-1)．因此 N 在 $L^2(G)$ 中的闭包 $\overline{N}$ 是由这种函数组成的（实际上我们将证明 $\overline{N}=N$，但是这里我们不必知道这点）．设 $\{u_k\}$ 是 $\overline{N}$ 中的一个有界序列．于是，由定理10-25，$\{u_k\}$ 满足不等式(10-67)．由于引理10-26，它有一个在 $L^2(G)$ 中收敛的子序列．

因为 $\overline{N}$ 是一个 Hilbert 空间，从8-5节的定理8-17立即得

到想要的结果．在 N' 的情形，我们利用 $\{Q'_j\}$ 盖住 P' 这个事实(定理 10-23)，然后用同样的方法继续进行．

为了完成定理 10-1 的证明，我们仿照 9-2 节中的推理．首先，我们注意到

引理 10-27 若 $u\in H^m(G)$ 满足等式(10-1)，并且 $Pu=0$，则 $u\in N$．

证明 由 3-1 节的定理 3-1，我们知道 $u\in C^\infty(G)$．为了证明 u 属于 $C^\infty(\overline{G})$，只要证明每个 $\chi_0\in\partial G$ 有一个邻域 $\mathscr{N}$，使得 $u\in C^\infty(\mathscr{N}\cap\overline{G})$ 就够了．取这个邻域如此地小，使得可以用 10-7 节中所描述的方式把 $\mathscr{N}\cap\overline{G}$ 映射到 $\overline{\sigma}_R$ 中去．设 $\tilde{u}$ 表示在这个映射下 u 的象．设 $0<R'<R$，又设 $\zeta\in C^\infty(\overline{\sigma}_R)$ 在 $\sigma_{R'}$ 中等于 1 而在 $|\chi|=R$ 附近等于零．若 $v\in\mathscr{C}_{R'}$，我们有

$$(P(\zeta\tilde{u}),\ Pv)+\sum\langle Q_j(\zeta\tilde{u}),\ Q_jv\rangle_{m-m_j-1/2}=0$$

因此，$\zeta\tilde{u}$ 满足定理 10-8 的假设．这就证明了对于某个 $R''>0$，$\tilde{u}\in C^\infty(\overline{\sigma}_{R''})$．因此，对于某个邻域 $\mathscr{N}'$，我们有 $u\in C^\infty(\overline{G}\cap\mathscr{N}')$．这就完成了证明．

现在我们转来证明定理 10-1 的结论 4．设 M 表示满足等式(10-1)并且有 $u\perp N$ 的那些函数 $u\in H^m(G)$ 构成的集合．类似地，设 M' 表示满足等式(10-4)并且有 $v\perp N'$ 的那些函数 $v\in H^m(G)$ 构成的集合．我们断言

引理 10-28 存在常数 C，使得

$$\|u\|_m\leqslant C\|Pu\|,\ u\in M \tag{10-68}$$

$$\|v\|_m\leqslant C\|P'v\|,\ v\in M' \tag{10-69}$$

证明 若(10-68)不成立，就应该有一个序列 $\{u_k\}\subset M$，使得

$$\|u_k\|_m=1,\ \|Pu_k\|\to 0 \tag{10-70}$$

由引理 10-26，存在一个子序列(还用 $\{u_k\}$ 来表示)，它在 $L^2(G)$ 中收敛．由定理 10-25，这个子序列在 $H^m(G)$ 中是一个Cauchy序列．因为 M 是 $H^m(G)$ 的一个闭子空间，极限 u 就在 M 中．另一方面 $Pu=0$，从而 $u\in N$．因此，我们一定有 $u=0$．但是由(10-70)，$\|u\|_m=1$．这个矛盾就证明了(10-68)．类似的推理给出(10-69)．

引理 10-29 若$u\in H^m(G)$, $f\in C^\infty(\overline{G})$, 并且

$$(Pu,\ Pv)+\sum\langle Q_ju,\ Q_jv\rangle_{m-m_j-1/2}=(f,\ v),\ v\in C^\infty(\overline{G}) \tag{10-71}$$

则$u\in C^\infty(\overline{G})$.

证明 因为$P'P$是椭圆型的, 并且u是$P'Pu=f$的弱解, 我们知道$u\in C^\infty(G)$(3-1 节定理 3-1). 为证明本引理, 只要证明, 每个$\chi_0\in\partial G$有一个邻域$\mathscr{N}$, 使得$u\in C^\infty(\overline{G}\cap\mathscr{N})$. 遵循着引理 10-27 的证明, 我们用 10-7 节中描述的方法把$\overline{G}\cap\mathscr{N}$映到$\overline{\sigma}_R$上. 于是, 我们看到$u$的象$\tilde{u}$满足定理 10-8 的假设, 由此我们可以引出想要的结论.

现在我们假定$u\in C^\infty(\overline{G})$满足(10-1)并且$Pu=f$. 那么, 若$v\in N'$, 根据等式(10-3), 我们有

$$(f,\ v)=(Pu,\ v)=(u,\ P'v)=0$$

因此$f\perp N'$. 反之, 假定$f\perp N'$. 则对于$v\in M'$, $(v,\ f)$是一个有界线性泛函(引理 10-28). 由 Fréchet-Riesz 表示定理(1-5 节定理 1-5), 存在一个$w\in M'$, 使得

$$(v,\ f)=(P'v,\ P'w),\ v\in M' \tag{10-72}$$

对于$v\in N'$, 这也是对的. 因为$H^m(G)$中每个满足等式(10-4)的函数是M'中一个函数和N'中一个函数的和, 对于所有这样的v, 等式(10-72)成立. 应用引理 10-29, 我们得出结论$w\in C^\infty(\overline{G})$, 并且对于$u=P'w$有类似的结论. 应用定理 10-1 的 1, 我们看到u是(10-1)和$Pu=f$的一个解. 对于g可以做类似的论证.

在完成定理 10-1 的证明时, 我们将利用

定理 10-30 若$f\in L^2(G)$并且$f\perp N'$, 则存在一个满足等式(10-1)的$u\in H^m(G)$, 使得$Pu=f$并且$u\perp N$.

证明 存在$C^\infty(\overline{G})$中的一个函数序列$\{f_k\}$, 它在$L^2(G)$中收敛到f(4-6 节引理 4-17). 因为N是$L^2(G)$中的一个闭子空间, $f_k=f_k'+f_k''$, 其中$f_k''\in N'$而$f_k'\perp N'$. 于是

$$\|f_k-f\|^2=\|f_k'-f\|^2+\|f_k''\|^2$$

因此在 $L^2(G)$ 中 $f'_k \to f$. 因为 $N' \subset C^\infty(\overline{G})$, 对于 $\{f'_k\}$ 这也是真的. 由定理 10-1 的结论 4, 存在一个满足等式(10-7)和 $Pu_k = f'_k$ 的 $u_k \in C^\infty(\overline{G})$. 我们可以取 $u_k \in M$. 由引理 10-28, 我们知道 $\{u_k\}$ 在 $H^m(G)$ 中构成一个 Cauchy 序列. 它们的极限 u 显然在 M 中, 并满足 $Pu = f$. 这就完成了证明.

现在我们来证明定理 10-1 的结论 5. 假定 $u \in L^2(G)$, $f \in C^\infty(\overline{G})$, 以及对于所有满足等式 (10-4) 的函数 $v \in C^\infty(\overline{G})$, 等式 (10-6) 成立. 我们令 $u = u' + u''$, 其中 $u'' \in N$ 而 $u' \perp N$. 显然, u' 也满足等式(10-6). 显然 $f \perp N'$. 因此, 存在一个满足 $Pu_1 = f$ 的 $u_1 \in C^\infty(\overline{G}) \cap M$. 因此, 对于所有的 $v \in C^\infty(\overline{G}) \cap M'$ 我们有

$$(u' - u_1,\ P'v) = 0$$

存在 $C^\infty(\overline{G})$ 中的一个函数序列 $\{g_k\}$, 它在 $L^2(G)$ 中收敛到 $u' - u_1$. 我们可以取 $g_k \perp N$ (见定理 10-30 的证明). 由定理 10-1 的结论 4, 存在一个 $v_k \in C^\infty(\overline{G}) \cap M'$, 使得 $P'v_k = g_k$. 因此, 对每个 k, $(u' - u_1, g_k) = 0$. 取极限, 我们看到 $u' = u_1 \in C^\infty(\overline{G})$. 因为 $u = u' + u''$, 而且 $u'' \in N$, 结果就得到了.

习　　题

10-1 证明引理 10-2.

10-2 证明定理 10-4 蕴含着定理 10-3.

10-3 验证定理 10-4 证明中最后一个事实.

10-4 证明引理 10-6.

10-5 证明推论 10-12.

10-6 证明不等式(10-26).

10-7 证明等式(10-31).

10-8 证明等式(10-32)蕴含着 α_j 等于零.

10-9 推导等式(10-33)和(10-34).

10-10 补充 10-5 节中给出的定理 10-8 的证明的细节.

10-11 证明等式(10-42).

10-12 证明等式(10-56).

10-13 证明等式(10-61)和(10-62).

10-14 证明$(\hat{P})'=(P')^\wedge$.

10-15 证明$(\tilde{P})'-(P')^\sim$是比P低阶的(算子).

10-16 证明等式(10-64)定义一个范数.

10-17 证明M和M'是$H^m(G)$的闭子空间.

10-18 证明不等式(10-69).

10-19 为什么在定理10-30的证明中我们可以取$u_k\in M$?

参 考 文 献

Agmon, S.: "Lectures on Elliptic Boundary Value Problems", van Nostrand, 1965.

Aronszajn, N.: On Coercive Integrodifferential Forms, *Kansas Report*, no. 14, pp. 94–106, 1954.

——and A. N. Milgram: Differential Operators on Riemannian Manifolds, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, vol. 2, pp. 1-61, 1953.

Berezanskii, Ju. M.: "Eigenspansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators", American Mathematical Society, 1968.

Bers, L., John F. Fritz, and M. Schechter: "Partial Differential Equations", J. Wiley, 1964; American Mathematical Society, 1974.

Browder, F.E.: On the Regularity Properties of Solutions of Elliptic Differential Equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 9, pp. 351–361, 1956.

Carroll, R. W.: "Abstract Methods in Partial Differential Equations", Harper and Row, 1969.

Courant, R., and D. Hilbert: "Methods of Mathematical Physics II", Interscience, 1962.

Friedman, A.: "Generalized Functions and Partial Differential Equations", Prentice Hall, 1963.

——: "Partial Differential Equations", Holt, Reinhart, and Winston, 1969.

Friedrichs, K. O.: On the Differentiability of Solutions of Linear Elliptic Differential Equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 6, pp. 299–326, 1953.

Gårding, L.: Dirichlet's Problem for Linear Partial Differential Equations, *Math. Scand.*, vol. 1, pp. 55–72, 1953.

——: Solution Directe du Problém du Cauchy pour les Equations Hyperboliques, *Colloques Internationaux du Centre Nat. de la Recherche Scient.*, vol. 71, pp. 71-90, 1956.

Gelfand, I. M., and G. E. Shilov: "Generalized Functions III", Academic Press, 1967.

Hellwig, G.: "Partial Differential Equations", Blaisdell, 1964.

Holmgren, E.: Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen, *Öfrersigt af Kongl. Vetenskaps-Akademien Förhandlinger*, vol. 58, pp. 91–103, 1901.

Hörmander, L.: On the Theory of General Partial Differential Operators, *Acta Math.*, vol. 94, pp. 161–248, 1955.

——: On the Interior Regularity of the Solutions of Partial Differential Equations, *Comm. Pure Appl. Math.* vol. 11, pp. 197–218, 1958.

——: "Linear Partial Differential Operators", Springer, 1963.

Leray, J.: Hyperbolic Equations, Princeton Lecture Notes, 1954.

Lewy, H.: An Example of a Smooth Linear Partial Differential Equation without Solution, *Ann. Math.*, vol. 66, pp. 155–158, 1957.

Lions, J. L., and E. Magenes: "Problems aux Limites non Homogenes", I, II, III, Dunod, 1968.

Lopatinski, Y. B.: On a Method of Reducing Boundary Problems for a System of Differential Equations of Elliptic Type to Regular Integral Equations, (Russian) *Ukrain. Mat. Z.*, vol. 5, pp. 123–151, 1953.

Malgrange, B.: Sur une Classe di'operateurs Différentiels Hypoelliptiques, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 85, pp. 283–306, 1957.

——: Operatori Differenziali Teorie delle Distribuzoni, *Centro Interzionale Matematico Estiro*, 2° Ciclo Soltino di Vallombrosa, 1–9, Settembre, 1961.

Miranda, C.: "Partial Differential Operators of Elliptic Type", Springer, 1970.

Mizohata, S.: "The Theory of Partial Differential Equations", Cambridge, 1973.

Necas, J.: "Les Methodes Directes en Theorie des Equations Elliptiques", Masson, Academia, 1967.

Nirenberg, L.: Remarks on Strongly Elliptic Partial Differential Equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 8, pp. 649–675, 1955.

——: On Elliptic Partial Differential Equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, vol. 13, pp. 116–162, 1959.

Peetre, J.: On Estimating the Solutions of Hypoelliptic Differential Equations near the Plane Boundary, *Math. Scand.*, vol. 9, pp. 337–351, 1961.

Peyser, G.: Energy Inequalities for Hyperbolic Equations in Several Variables with Multiple Characteristics and Constant Coefficients, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 180, pp. 478–490, 1963.

Schechter, M.: Solution of the Dirichlet Problem for Equations not necessarily Strongly Elliptic, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 64, pp. 371–372, 1958.

——: General Boundary Value Problems for Elliptic Partial Differential Equations, ibid., vol. 65, pp. 70–72, 1959*a*.

——: Integral Inequalities for Partial Differential Operators and Functions Satisfying General Boundary Conditions, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 12, pp. 37–66, 1959*b*.

——: Remarks on Elliptic Boundary Value Problems, ibid., vol.12, pp. 561–578, 1959*c*.

——: On the Dominance of Partial Differential Operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 107, pp. 237, 1963; II, *Ann. Scand. Norm. Sup. Pisa*, vol. 18, pp. 255–282, 1964.

Schwartz, L.: Sir Alcuni Problemi della Teoria delle Equazioni Differenziali

Lineari di Tipo Ellitico, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano,* vol. 27, pp. 3-41, 1958.
Spivak, M.: "Calculus on Manifolds", Benjamin, 1965.
Treves, F.: The Equation

$$\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+(x^2+y^2)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left(x\,\frac{\partial}{\partial y}-y\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]^2 u+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f$$

with real coefficients, is "without solutions", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 68, p. 332, 1962.
——: "Basic Linear Partial Differential Equations", Academic Press, 1975.